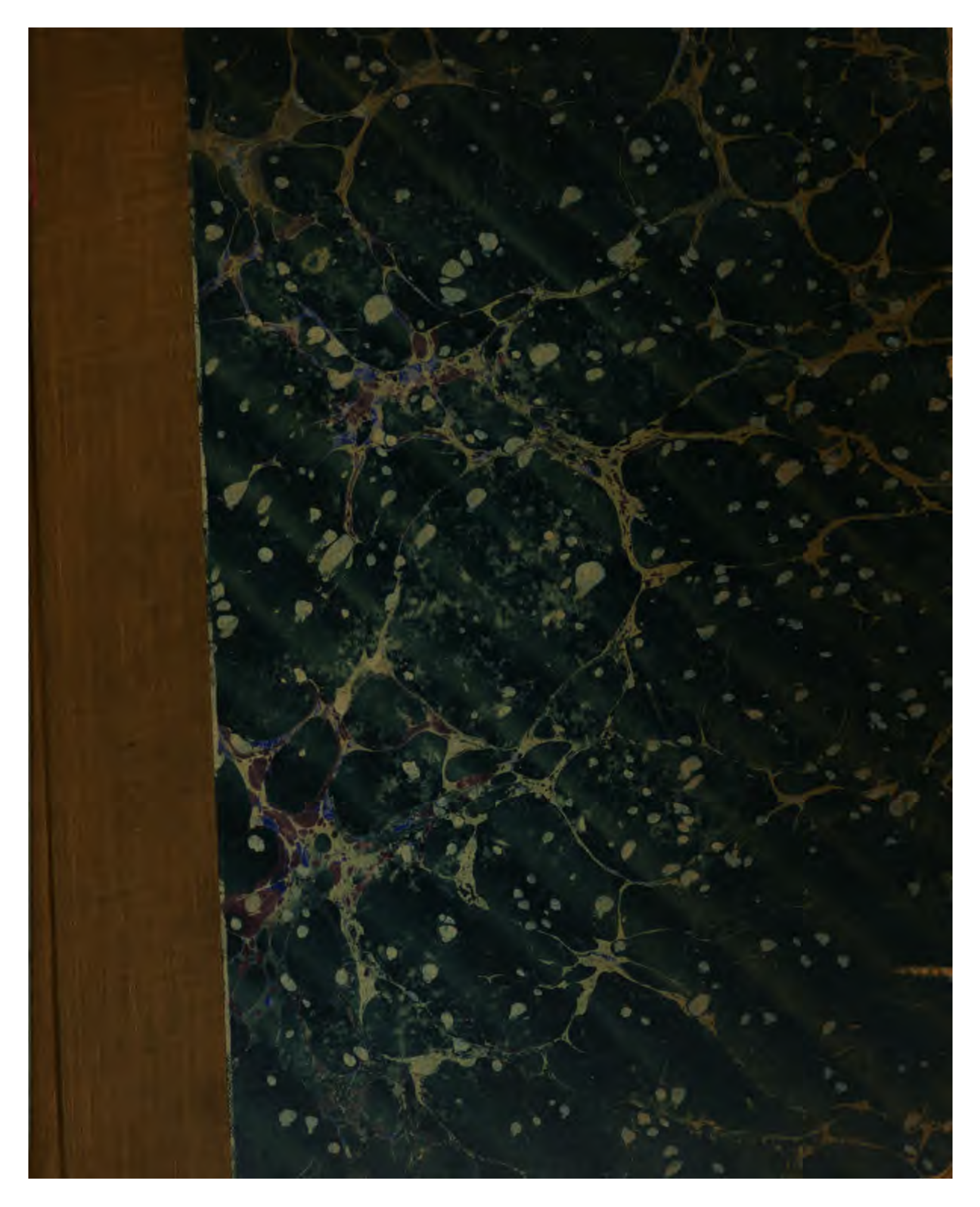
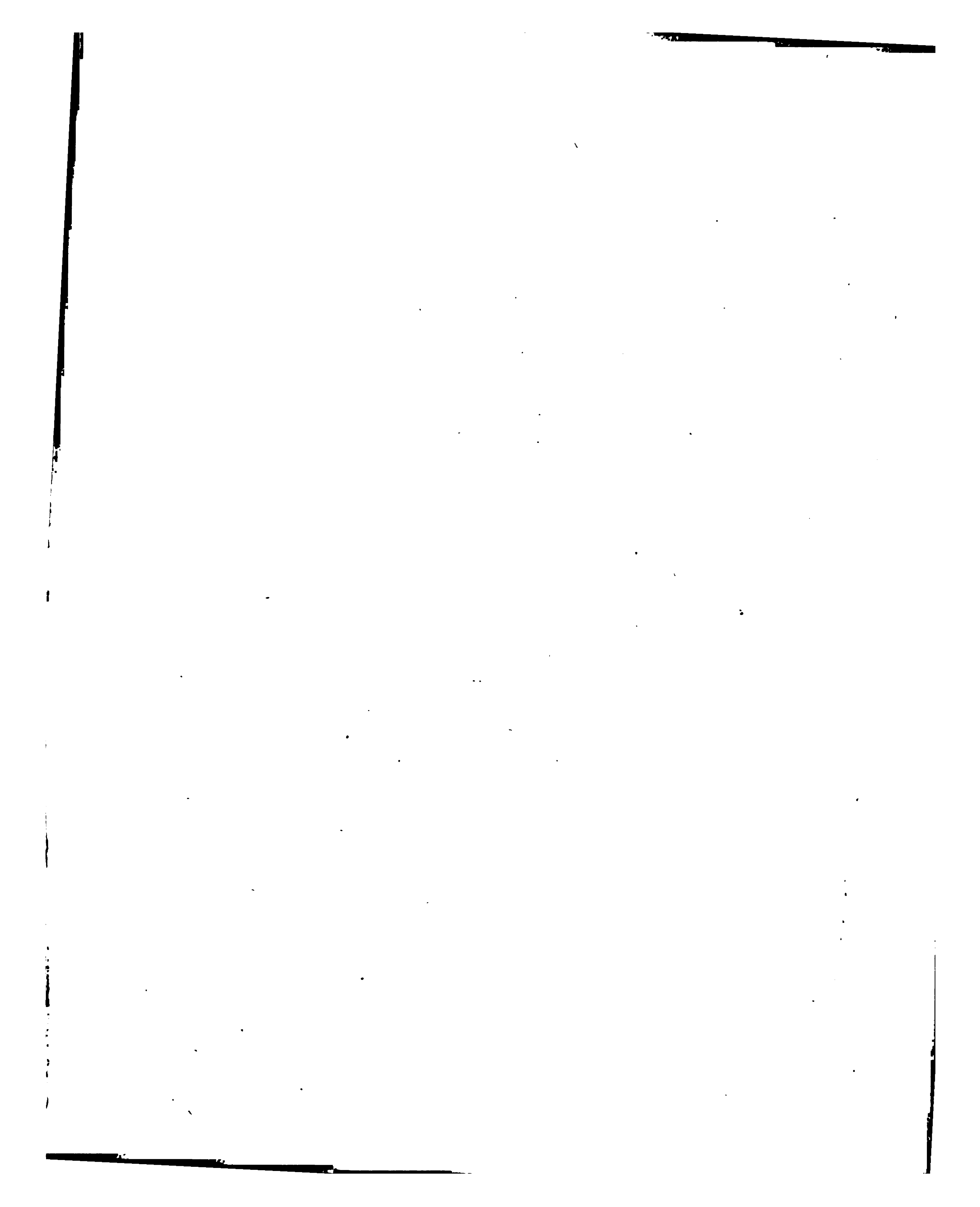




Zur Geschichte der Polyedercoordinaten.

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Albert Maatz

aus Rostock.

Rostock.

Druck der Carl Boldt'schen Hof-Buchdruckerei.

1903.

Referent: Herr Professor Dr. **Staude.**

Meinen Eltern!

Referent: Herr Professor Dr. **Staude.**

Meinen Eltern!

Im Jahre 1827 veröffentlichte Bobillier seinen „essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue[1])" und zeigte darin, wie sich statt der allgemein gebräuchlichen rechtwinkligen Coordinaten — x, y in der Ebene und x, y, z im Raume — lineare Funktionen derselben, in der Ebene drei und im Raume vier, bei manchen geometrischen Untersuchungen mit grossem Vorteil verwenden lassen. Diese Arbeit ist nach Serret als das erste Auftreten der Polyedercoordinaten anzusehen; er liest aus ihr das für diese Coordinaten charakteristische Prinzip heraus, „de représenter un point mobile par ses distances à un nombre quelconque de droites ou de plan fixes[2])", und feiert sie in beredten Worten. Aber wohl nicht ganz mit Recht. Denn darin sind nur die Dreiecks- resp. Tetraedercoordinaten angedeutet, und auf eine Verallgemeinerung auf Polyeder mit mehr Flächen wird von Bobillier nirgends hingewiesen. So müssen wir wohl Plücker das Verdienst zusprechen, zuerst auf die Polyedercoordinaten aufmerksam gemacht zu haben; denn er bestimmte im Jahre 1830 zunächst einen Punkt der Ebene durch seine Abstände von einer beliebigen Anzahl von festen Geraden, den „Coordinatenlinien"[3]) und dehnte dieses Prinzip auch auf den Raum aus, indem er hier einen beliebigen Punkt fixierte durch seine Entfernungen von beliebig vielen Ebenen. Er selbst machte zunächst allerdings von dieser allgemeineren Bestimmung eines Raumpunktes noch keinen Gebrauch, und praktische Anwendungen fanden seine Coordinaten vorerst noch nicht. Zwar errangen sich die Tetraedercoordinaten nach und nach immer mehr Boden auf dem Gebiete der analytischen Untersuchungsmethoden der Geometrie, weil sie, auf der untersten Stufe der Polyedercoordinaten stehend, eine Eleganz, Leichtigkeit und Übersichtlichkeit in der Handhabung zeigten, die man sich gerne zu nutze machte; aber über diese Tetraedercoordinaten ging man lange Zeit nicht hinaus. Erst 1869 unternahm es P. Serret[4]), die Aufmerksamkeit auf die Polyedercoordinaten im eigentlichen Sinne zu richten, und zeigte an ihren Anwendungen auf die Theorie der Flächen zweiter Ordnung ihre grosse Verwendbarkeit bei manchen Problemen.

---

[1]) Annales de mathématiques pures et appliqués par J. D. Gergonne; tome XVIII, p. 320 und folgende.

[2]) P. Serret. Géométrie de direction, Paris 1869; Préface p. XIV.

[3]) Plücker: Über ein neues Coordinatensystem. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 5, S. 31.

[4]) P. Serret: Géométrie de direction. Paris 1869. Weiterhin ist dies abgekürzt citiert worden mit „Serret".

Im Folgenden sollen aus seinem Werke zwei Problemgruppen herausgegriffen werden, und es soll gezeigt werden, wie er allein aus den Sätzen über die Gleichungsform der Fläche, die auf Polarpolyeder bezogen ist, und über die Identitäten zwischen den nach dem Modul 2 associierten Ebenen durch Kombination mehrere wichtige Eigenschaften von zehn Ebenen einer Fläche 2. Kl., von neun Ebenen, die zwei Flächen 2. Kl. gemeinsam berühren, und von acht Ebenen, die gemeinsame Tangentialebenen von drei Flächen 2. Kl. sind, erhält und wie diese Sätze gestatten, weitere Theoreme ähnlicher Art über die gemeinsamen Polarpolyeder mehrerer Flächen 2. Grades, die Reye angegeben hat, überaus einfach und bequem zu beweisen.

Der dann weiterhin angeführte, von Hesse gegebene Beweis[1]) des Satzes über die acht Schnittpunkte von drei Flächen 2. O. wird uns zu der Bemerkung leiten, dass aus den Formeln Hesse's einige der von Serret angegebenen Sätze abgeleitet werden können, wenn wir in ihnen als Variable Polyedercoordinaten zu Grunde legen, dass also die Formeln von Hesse schon einen Teil der betrachteten Theorie der Polyedercoordinaten in ihrer Anwendung auf die Flächen 2. O. enthalten.

Und endlich werden wir bei einer kurzen Betrachtung einiger Sätze, mit denen Reye seine Untersuchung: „Über Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen“ [2]) einleitet, sehen, dass in der Anwendung dieser Momente, die nichts anderes sind, als die Summe der n^{ten} Potenzen von Polygoncoordinaten, jede mit einem Faktor multipliziert, der in gewissem Sinne unbewusste Gebrauch der Polygoncoordinaten vorliegt; und es zeigt sich, dass es Reye dadurch möglich wird, genau in derselben Weise die aus der Identität zwischen zehn nach dem Modul 2 associierten Punkten folgenden Sätze abzuleiten[3]), wie es Serret getan hat, von dem er aber durchaus unabhängig ist, wie er selbst bemerkt.

Die Darstellung ist im Kapitel I und an den betreffenden Stellen des Kapitels II in der Weise gegeben, dass die Sätze nur für Polyedercoordinaten bewiesen und dann mit Hülfe des Prinzips der Dualität auch auf die Polygoncoordinaten übertragen sind.

---

[1]) Hesse: De curvis et superficiebus secundi ordinis. Crelle's Journal Band 20, S. 285 und folg. 1840.

[2]) Crelle's Journal, Band 72, S. 293 u. f.

[3]) Vergl. Reye: Über Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme. Crelle's Journal, Band 77, S. 271.

Kapitel I.

§ 1.

Definition der Polyeder- und Polygoncoordinaten. Gleichung der Ebene resp. des Punktes, der Fläche 2. O. resp. 2. Kl., der Polarebene eines Punktes resp. des Poles einer Ebene in ihnen.

Unter den Polyedercoordinaten eines Punktes $P_0 = x_0, y_0, z_0, p_0$, die bezogen sind auf ein n-Flach, versteht man n-Zahlen

$$X_{i0} \; (i = 1, 2, .. n),$$

die sich verhalten wie die mit beliebigen, aber festen Faktoren multiplizierten Abstände des Punktes P_0 von den n-„Coordinatenebenen".

Unter den Polygoncoordinaten einer Ebene $E_0 = u_0, v_0, w_0, q_0$, die bezogen sind auf ein n-Eck, versteht man n-Zahlen

$$U_{i0} \; (i = 1, 2, .. n),$$

die sich verhalten wie die mit beliebigen, aber festen Faktoren multiplizierten Abstände der Ebene E_0 von den n-„Coordinatenpunkten".

Sind die festen Faktoren μ_i und die Abstände von den Ebenen π_{i0}, haben diese selbst ferner die Gleichungen in homogenen Coordinaten:

$$(1') \qquad E_i(x, y, z, p) = u_i x + v_i y + w_i z + q_i p = 0; \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

so ist die analytische Definition der Polyedercoordinaten des Punktes P_0:

$$X_{10} : X_{20} : \ldots : X_{n0} = \mu_{10}\pi_{10} : \mu_{20}\pi_{20} : \ldots : \mu_{n0}\pi_{n0},$$

und durch Herstellung der Hesseschen Normalform der Gleichungen (1′) und geeignete Wahl der μ_{i0} erhält man hieraus das System:

$$\varrho X_{i0} = u_{i0} x_0 + v_i y_0 + w_i z_0 + q_i p_0$$

und den Satz:

I. Die Beziehungen zwischen den Polyedercoordinaten X_i und den homogenen Coordinaten x, y, z, p eines Punktes P werden ausgedrückt durch das System:

$$(1) \qquad \varrho X_i = u_i x + v_i y + w_i z + q_i p; \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

I. Die Beziehungen zwischen den Polygoncoordinaten U_i und den homogenen Coordinaten u, v, w, q einer Ebene E werden ausgedrückt durch das System:

$$(1) \qquad \varrho U_i = x_i u + y_i v + z_i w + p_i q; \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Daraus folgt ferner:

II. Die Polyedercoordinaten eines bestimmten Punktes verhalten sich wie die linken Seiten der Gleichungen der Coordinatenebenen, in die die homogenen Coordinaten des betr. Punktes substituiert sind.

III. Die Polyedercoordinaten sind homogene lineare Funktionen der homogenen Coordinaten und als solche durch sie eindeutig bestimmt.

II. Die Polygoncoordinaten einer bestimmten Ebene verhalten sich wie die linken Seiten der Gleichungen der Coordinatenpunkte, in die die homogenen Coordinaten der betr. Ebene substituiert sind.

III. Die Polygoncoordinaten sind homogene lineare Funktionen der homogenen Coordinaten und als solche durch sie eindeutig bestimmt.

Sind drei der n-Polyedercoordinaten gegeben, so kann man aus den entsprechenden drei Gleichungen des Systems (1) die Verhältnisse der homogenen: $x:y:z:p$ bestimmen, und da auch die $u_i\ v_i\ w_i\ q_i$ fest gegeben sind, so sind auch durch (1) die übrigen Polyedercoordinaten bestimmt. Das liefert die Sätze:

IV. Die Gesamtheit der Polyedercoordinaten eines Punktes ist durch drei von ihnen bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt.

V. Die homogenen Punktcoordinaten sind lineare Funktionen der Polyedercoordinaten und als solche durch sie bestimmt.

IV. Die Gesamtheit der Polygoncoordinaten einer Ebene ist durch drei von ihnen bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt.

V. Die homogenen Ebenencoordinaten sind lineare Funktionen der Polygoncoordinaten und als solche durch sie bestimmt.

Da die Gleichung $\varrho X_i = 0$

die Gesamtheit aller Punkte darstellt, deren Entfernung π_i von E_i verschwindet (nach der Definition der Polyedercoordinaten), so folgt:

VI. Die Gleichungen

$$X_i = 0$$

stellen die Coordinatenebenen selbst dar,

VI. Die Gleichungen

$$U_i = 0$$

stellen die Coordinatenpunkte selbst dar,

und

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein betrachteter Punkt in einer Coordinatenebene liegt, ist, dass die entsprechende Polyedercoordinate gleich Null ist.

VII. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine betrachtete Ebene durch einen Coordinatenpunkt geht, ist, dass die entsprechende Polygoncoordinate gleich Null ist.

Endlich ergibt sich hieraus die Bemerkung:

VIII. „Es können nicht alle Polyedercoordinaten eines Punktes gleichzeitig verschwinden, wenn die Coordinatenebenen nicht alle durch ihn hindurchgehen.“

VIII. „Es können nicht alle Polygoncoordinaten einer Ebene gleichzeitig verschwinden, wenn die Coordinatenpunkte nicht alle in ihr liegen.“

Aus den linearen Beziehungen zwischen den Polyeder- und den homogenen Coordinaten eines Punktes erhält man, wie man durch einfache Umrechnung der einen Coordinaten in die anderen zeigen kann, den Satz:

IX. „Jede homogene lineare Gleichung in den Polyedercoordinaten eines laufenden Punktes von der Form:

(2) $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n = 0$

stellt eine Ebene dar;"

IX. „Jede homogene lineare Gleichung in den Polygoncoordinaten einer laufenden Ebene von der Form:

(2) $a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots . + a_n U_n = 0$

stellt einen Punkt dar;"

nebst der Umkehrung:

X. „Jede Ebene im Raume lässt sich durch eine homogene lineare Gleichung in den laufenden Polyedercoordinaten von der Form (2) darstellen."

X. „Jeder Punkt im Raume lässt sich durch eine homogene lineare Gleichung in den laufenden Polygoncoordinaten von der Form (2) darstellen."

Durch blosse Umrechnung beweist man ebenso:

XI. „Jede Gleichung höheren als ersten Grades in laufenden Polyedercoordinaten stellt eine Fläche dar als erzeugt durch ihre einzelnen Punkte; und zwar ist die Fläche von der m^{ten} Ordnung, wenn der Grad der Gleichung der m^{te} ist."

XI. „Jede Gleichung höheren als ersten Grades in laufenden Polygoncoordinaten stellt eine Fläche dar als erzeugt durch ihre einzelnen Tangentialebenen; und zwar ist die Fläche von der m^{ten} Klasse, wenn der Grad der Gleichung der m^{te} ist."

Weiterhin sollen jedoch nur Flächen zweiter Ordnung resp. zweiter Klasse betrachtet werden. Für sie also gilt:

XI'. „Jede Gleichung zweiten Grades in laufenden Polyedercoordinaten stellt eine Fläche zweiter Ordnung dar," und umgekehrt: „Jede Fläche zweiter Ordnung kann durch eine Gleichung zweiten Grades in laufenden Polyedercoordinaten dargestellt werden."

XI'. „Jede Gleichung zweiten Grades in laufenden Polygoncoordinaten stellt eine Fläche zweiter Klasse dar," und umgekehrt: „Jede Fläche zweiter Klasse kann durch eine Gleichung zweiten Grades in laufenden Polygoncoordinaten dargestellt werden."

Der Beweis der Umkehrung folgt wieder aus dem entsprechenden Satze für homogene Coordinaten durch Umrechnung.

Für eine Fläche 2. O., deren Gleichungen in homogenen und in Polyedercoordinaten gegeben sind:

$$f\,(x\,y\,z\,p) = 0$$

$$\text{und } F\,(X_1 X_2 \ldots X_n) = 0$$

gilt vermöge (1) identisch

$$f\,(x\,y\,z\,p) \equiv F\,(X_1 X_2 \ldots X_n).$$

In Bezug auf diese Fläche sind 2 Punkte, $P_1 = x_1 y_1 z_1 p_1 = X_{11}, X_{21}, \ldots . X_{n1}$ und $P_2 = x_2 y_2 z_2 p_2 = X_{12}, X_{22}, \ldots . X_{n2}$, harmonische Pole oder konjugiert, wenn zwischen den homogenen Coordinaten die Beziehung besteht:

$$f_1 (x_1 y_1 z_1 p_1) x_2 + f_2 (x_1 y_1 z_1 p_1) y_2 + f_3 (x_1 y_1 z_1 p_1) z_2 + f_4 (x_1 y_1 z_1 p_1) p_2 = 0,$$

worin $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots . f_i = \frac{\partial f}{\partial p}$ ist.

Drückt man diese Beziehung in den Polyedercoordinaten aus, so hat man, da die X_i nach (1) lineare Funktion der x, y, z, p sind, zu setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_1^n i\, F_i \frac{\partial X_i}{\partial x} = \sum_1^n i\, F_i\, u_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_1^n i\, F_i \frac{\partial X_i}{\partial d} = \sum_1^n i\, F_i\, v_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_1^n i\, F_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \sum_1^n i\, F_i\, w_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \sum_1^n i\, F_i \frac{\partial X_i}{\partial p} = \sum_1^n i\, F_i\, q_i,$$

wenn man zur Abkürzung bezeichnet:

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = F_i.$$

Dann nimmt die Beziehungsgleichung mit Berücksichtigung von (1) die Form an:

$$\sum_1^n i\, F_i (X_{11}, X_{21}, \ldots . . X_{n1}) X_{i2} = 0,$$

d. h.:

XII. „Die Beziehung zwischen den Polyedercoordinaten zweier in Bezug auf die Fläche 2. O. $F (X_1, X_2, \ldots X_n) = 0$ harmonischer oder konjugierter Punkte, $P_1 = X_{11}, \ldots X_{n1}$ und $P_2 = X_{12}, \ldots, X_{n2}$, ist:

$$\sum_1^n i\, F_i (X_{11}, X_{21} \ldots . X_{n1}) X_{i2} = 0.“$$

XII. „Die Beziehung zwischen den Polygoncoordinaten zweier in Bezug auf die Fläche 2. Kl. $F (U_1, U_2, \ldots U_n) = 0$ harmonischer oder konjugierter Ebenen, $E_1 = U_{11}, \ldots U_{n1}$ und $E_2 = U_{12}, \ldots U_{n2}$, ist:

$$\sum_1^n i\, F_i (U_{11}, U_{21}, \ldots U_{n1}) U_{i2} = 0.“$$

Ist nur der Punkt P_1 fest gegeben, so sind die X_{i2} gleichbedeutend mit den laufenden Coordinaten X_i, und unsere Gleichung stellt dann eine Ebene dar nach (2), die Polarebene des Punktes P_1:

XII'. „Die Gleichung der Polarebene eines Punktes $P_1 = X_{11}, \ldots X_{n1}$ in Bezug auf die Fläche 2. O. $F = 0$ in laufenden Polyedercoordinaten X_i lautet:

$$\sum_1^n i\, F_i (X_{11}, X_{21}, \ldots X_{n1}) X_i = 0.“$$

XII'. „Die Gleichung des Poles einer Ebene $E_1 = U_{11}, \ldots, U_{n1}$ in Bezug auf die Fläche 2 Kl. $F = 0$ in laufenden Polygoncoordinaten U_i lautet:

$$\sum_1^n i\, F_i (U_{11}, U_{21}, \ldots U_{n1}) = 0.“$$

Bemerkung: Wie man sieht, enthalten unsere Formeln für $n = 4$ die allgemein benutzten Tetraedercoordinaten. Der wesentliche Unterschied der Fälle $n > 4$ und $n = 4$ besteht aber darin, dass für $n > 4$ die Verhältnisse der Polyedercoordinaten nicht wie bei $n = 4$ unabhängig von einander sind. Dass jedoch diese Verallgemeinerung sich unter Umständen als sehr brauchbar erweist, wird sich im Laufe der weiteren Betrachtung zeigen.

§ 2.

Polarpolyeder und -polygone und Gleichungsformen der Flächen 2. O. resp. 2. Kl., bezogen auf dieselben.

(Serret: géométrie de direction, p. 55—57.)

Den Nutzen der Coordinatenpolyeder und -polygone kann man erkennen, wenn man als solche Polarpolyeder resp. -polygone der Fläche[1]) einführt. Daher seien zunächst die Definitionen der entsprechenden Polarpolyeder gegeben, wie sie für diesen Zweck passend sind:

I. „Ein Tetraeder heisst einer Fläche conjugiert oder ihr Polartetraeder, wenn die Polarebene jeder Ecke in Bezug auf die Fläche mit der entsprechenden Gegenebene zusammenfällt."

II. „Ein Pentaeder ist ein Polarpentaeder der Fläche, wenn die Polarebene jeder Ecke durch die entsprechende Gegenkante geht."

III. „Ein Hexaeder ist ein Polarhexaeder der Fläche, wenn die Polarebene jeder Ecke in Bezug auf sie durch die entsprechende Gegenecke geht."

IV. „Ein hexagonales Octaeder ist ein Polaroctaeder der Fläche, wenn die Polarebene jeder Ecke in Bezug auf sie durch die entsprechende Gegenecke geht."

I. „Ein Tetragon heisst einer Fläche konjugiert oder ihr Polartetragon, wenn der Pol jeder Ebene des Tetragons in Bezug auf die Fläche mit der entsprechenden Gegenecke zusammenfällt."

II. „Ein Pentagon ist ein Polarpentagon der Fläche, wenn der Pol jeder Ebene des Pentagons in die entsprechende Gegenkante fällt."

III. „Ein Hexagon ist ein Polarhexagon der Fläche, wenn der Pol jeder seiner Ebenen in Bezug auf sie in die entsprechende Gegenebene fällt."

IV. „Ein hexaedrisches Octogon ist ein Polaroctogon der Fläche, wenn der Pol jeder Ebene in Bezug auf sie in die entsprechende Gegenebene fällt."

Sind also E_i die Seitenebenen des Coordinatenpolyeders, wo

$i = 1, 2, ., 4$ für das Tetraeder
$i = 1, 2, . ., 5$ „ „ Pentaeder
$i = 1, 2, . . ., 6$ „ „ Hexaeder
$i = 1, 2, ..., 8$ „ „ Octaeder

gilt, so lässt sich das Verhältnis der Polarebene einer Ecke zu der entsprechenden Gegenebene, -kante oder -ecke schematisch darstellen, wie folgt

[1]) Unter „Fläche" sei hier immer „Fläche 2. O." resp. „Fläche 2. Kl." verstanden.

Tetraeder: Die Polarebene der Ecke $E_1 \times E_2 \times E_3$ liegt in E_4
Pentaeder: „ „ „ „ $E_1 \times E_2 \times E_3$ geht durch $E_4 \times E_5$
Hexaeder: „ „ „ „ $E_1 \times E_2 \times E_3$ „ „ $E_4 \times E_5 \times E_6$
Hexag. Octaeder „ „ „ „ $E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ „ „ $E_5 \times E_6 \times E_7 \times E_8$;

und analoge Beziehungen gelten von den Polarebenen aller andern Ecken der entsprechenden Polyeder.

Die allgemeine Gleichung einer Fläche, bezogen auf ein Coordinaten = nFlach, ist nun nach § 1, XI':

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, X_i\, X_k = 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots n, \end{matrix} \tag{1}$$

in der $_{ik}$ läuft über alle $\frac{n\,(n-1)}{2}$ Kombinationen der Indices und $a_{ik} = a_{ki}$ ist. Nach § 1, XII' lautet dann die Gleichung der Polarebene eines Punktes $P_0 = X_{10}, X_{20}, \ldots X_{n0}$ in Bezug auf diese Fläche:

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik}\, X_{io}\, X_k = 0. \tag{2}$$

Für $n = 4$ erhält man in (1) und (2) die Formeln für ein Coordinatentetraeder. Für die Ecke $E_1 \times E_2 \times E_3$, für die nach § 1, VII $X_{10} = 0, X_{20} = 1, X_{30} = 0$ ist, folgt aus (2) als Gleichung der Polarebene in Bezug auf (1):

$$\sum_1^4{}_k\, a_{4k}\, X_{40}\, X_k = 0.$$

Ist endlich das Tetraeder Polartetraeder der Fläche so muss diese Ebene identisch sein mit $X_4 = 0$, und da nach § 1, VIII $X_{40} \neq 0$, so folgt:

$$a_{41} = 0, \; a_{42} = 0, \; a_{43} = 0.$$

Aus analogen Betrachtungen für die andern Ecken ergibt sich, dass schliesslich alle $a_{ik} = 0$, für die $i \neq k$, sodass von (1) nur noch bleibt:

$$\sum_1^4{}_i\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.$$

Ist umgekehrt die Gleichung der Fläche in dieser Form gegeben, so hat die Polarebene von $E_1 \times E_2 \times E_3$ die Gleichung $a_{44}\, X_{40}\, X_4 = 0$ und da wieder $X_{40} \neq 0$ und auch $a_{44} \neq 0$, so folgt für sie $X_4 = 0$, d. h. die Polarebene dieser Ecke ist identisch mit ihrer Gegenebene. Analoges lässt sich für die Polarebenen aller andern Ecken zeigen; es ergibt sich somit:

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Tetraeder Polartetraeder einer Fläche ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatentetraeder, die Gleichung hat:

$$\sum_1^4{}_i\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.\text{“}$$

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Tetragon Polartetragon einer Fläche ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatentetragon, die Gleichung hat:

$$\sum_1^4{}_i\, a_{ii}\, U_i^2 = 0.\text{“}$$

Für $n = 5$ ist (1) die Gleichung einer Fläche, bezogen auf ein Pentaeder. Die Polarebene der Ecke $E_1 \times E_2 \times E_3$, für die nach § 1, VII $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$, $X_{30} = 0$ ist, hat daher die Gleichung:

$$\Sigma_{hk} a_{hk} X_{ho} X_k = 0; \quad \begin{matrix} h = 4, 5 \\ k = 1, 2, .. 5. \end{matrix}$$

Ist nun das Pentaeder der Fläche konjugiert, so geht diese Ebene durch die Kante $E_4 \times E_5$, ihre Gleichung muss also erfüllt sein durch $X_4 = 0$, $X_5 = 0$; daher müssen alle $a_{hk} = 0$ sein, für die $k \neq 4, 5$ ist. Da die gleiche Betrachtung für die andern Ecken das analoge Resultat liefert, so folgt, dass überhaupt alle $a_{ik} = 0$, für welche $i \neq k$; es wird also unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung der Fläche (1):

$$\sum_1^5 {}_i\, a_{ii} X_i^2 = 0.$$

Ist umgekehrt dies die Gleichung der Fläche, so hat die Polarebene von $E_1 \times E_2 \times E_3$ die Gleichung:

$$\sum_4^5 {}_h\, a_{hh} X_{ho} X_h = 0,$$

sie ist also erfüllt durch $X_4 = 0$, $X_5 = 0$, d. h. die Polarebene der betrachteten Ecke geht durch die Gegenkante. Da sich dieses Resultat ebenso für alle Ecken ergibt, so folgt der Satz:

II. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Pentaeder zu einer Fläche Polarpentaeder ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatenpentaeder, die Gleichung hat:

$$\sum_1^5 {}_i\, a_{ii} X_i^2 = 0.\text{“}$$

II. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Pentagon zu einer Fläche Polarpentagon ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatenpentagon, die Gleichung hat:

$$\sum_1^5 {}_i\, a_{ii} U_i^2 = 0.\text{“}$$

Ist $n = 6$, so geben (1) und (2) die Gleichungen der Fläche und der Polarebene eines Punktes in Bezug auf sie, als bezogen auf ein Hexaeder. Soll dieses nun Polarhexaeder der Fläche sein, so muss die Polarebene der Ecke $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$, $X_{30} = 0$ mit der Gleichung:

$$\Sigma_{hk} a_{hk} X_h X_k = 0, \quad \begin{matrix} h = 4, 5, 6 \\ k = 1, 2, \ldots 6 \end{matrix}$$

durch die Ecke $X_4 = 0$, $X_5 = 0$, $X_6 = 0$ gehen, ihre Gleichung also erfüllt sein durch die Coordinaten dieses Punktes; somit müssen alle $a_{hk} = 0$ sein, für die $h = 4, 5, 6$ und $k = 1, 2, 3$ ist. Analoge Bedingungen folgen für die andern Ecken und aus der Gesamtheit folgt, dass alle $a_{ik} = 0$, für welche $i \neq k$. Die Flächengleichung lautet also bei der gemachten Voraussetzung:

$$\sum_1^6 {}_i\, a_{ii} X_i^2 = 0.$$

Ist die Fläche umgekehrt hierdurch gegeben, so folgt aus:

$$\sum_{4}^{6} {}^{h}\, a_{hh}\, X_{ho}\, X_h = 0,$$

der Gleichung der Polarebene der Ecke $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$, $X_{30} = 0$, dass diese Ebene durch die Gegenecke $X_4 = 0$, $X_5 = 0$, $X_6 = 0$ geht. Das Gleiche gilt von den Polarebenen der andern Ecken; also erhält man:

III. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Hexaeder Polarhexaeder einer Fläche ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatenpolyeder, die Gleichung hat:

$$\sum_{1}^{6} {}^{i}\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.\text{“}$$

III. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Hexagon Polarhexagon einer Fläche ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses als Coordinatenpolygon, die Gleichung hat:

$$\sum_{1}^{6} {}^{i}\, a_{ii}\, U_i^2 = 0.\text{“}$$

Für $n = 8$ sind (1) und (2) die Gleichungen der Fläche und der Polarebene eines Punktes in Bezug auf sie, beide bezogen auf ein hexagonales Octaeder, wenn man noch die Voraussetzung macht, dass von den acht Ebenen E_i je vier durch einen Punkt gehen. Die Polarebene eines solchen Punktes, z. B. der Ecke $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$, $X_{30} = 0$, $X_{40} = 0$, hat also die Gleichung:

$$\sum {}^{hk}\, a_{hk}\, X_{ho}\, X_k = 0; \quad \begin{matrix} h = 5, 6, 7, 8, \\ k = 1, 2, \ldots\ldots 8. \end{matrix}$$

Ist nun das Octaeder ein Polaroctaeder der Fläche, so muss die Ebene durch den Punkt $X_5 = 0$, $X_6 = 0$, $X_7 = 0$, $X_8 = 0$ gehen und die Gleichung durch dieses Wertquadrupel erfüllt sein; es müssen daher alle $a_{hk} = 0$ sein, wo $h = 5, 6, 7, 8$ und $k = 1, 2, 3, 4$. Analoges folgt aus den Betrachtungen für die anderen Ecken und die Gesamtheit der Bedingungen zeigt, dass alle $a_{ik} = 0$, für die $i \neq k$, so dass die Flächengleichung (1) lautet:

$$\sum_{1}^{8} {}^{i}\, a_{ii} X_i^2 = 0.$$

Ist dies umgekehrt die Gleichung der Fläche, so folgt für die Polarebene des Punktes $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$, $X_{30} = 0$, $X_{40} = 0$ die Gleichung:

$$\sum_{5}^{8} {}^{h}\, a_{hh} X_{ho} X_h = 0.$$

Da diese erfüllt wird durch $X_5 = 0$, $X_6 = 0$, $X_7 = 0$, $X_8 = 0$, so geht die Polarebene der betrachteten Ecke durch deren Gegenecke, und da dasselbe für die Polarebenen aller andren Ecken gilt, so folgt der Satz:

IV. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein hexagonales Octaeder einer Fläche konjugiert ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses Achtflach als Coordinatenpolyeder, die Gleichung hat:

$$\sum_{1}^{8} {}^{i}\, a_{ii} X_i^2 = 0.\text{“}$$

IV. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein hexaedrisches Octogon einer Fläche konjugiert ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses Achteck als Coordinatenpolygon, die Gleichung hat:

$$\sum_{1}^{8} {}^{i}\, a_{ii} U_i^2 = 0.\text{“}$$

Hier mögen ferner noch zwei Sätze erwähnt werden, die sich auf zerfallende Flächen 2. O. oder 2. Kl. beziehen und später Anwendung finden werden. Während sich die bisherigen Sätze dieses Paragraphen auf geschlossene räumliche Gebilde bezogen, sollen jetzt noch untersucht werden die Gleichungsformen der Fläche, bezogen auf ein Polartrieder und eine konjugierte vierseitige körperliche Ecke. Man kommt dabei auf degenerierende Flächen. Definitionen:

Ein Trieder heisst einem Kegel 2. O. konjugiert, wenn die Polarebene jedes Punktes einer Kante in Bezug auf die Fläche mit der entsprechenden Gegenebene zusammenfällt.

Eine vierstellige körperliche Ecke heisst einem Kegel 2. O. konjugiert, wenn die Polarebene jedes Punktes einer Kante in Bezug auf die Fläche durch die Gegenkante geht.

Ein Dreieck heisst einer Grenzfläche 2. Kl. konjugiert, wenn der Pol jeder durch eine Seite gehenden Ebene in Bezug auf die Fläche mit der entsprechenden Gegenecke zusammenfällt.

Ein ebenes Viereck heisst einer Grenzfläche 2. Kl. konjugiert, wenn der Pol jeder durch eine Seite gehenden Ebene in Bezug auf die Fläche in der Gegenseite liegt.

Setzt man in (1) $n = 3$, so erhält man die Gleichung der Fläche bezogen auf ein Trieder. Für einen Punkt der Kante $X_{10} = 0$, $X_{20} = 0$ liefert dann (2) die Gleichung der Polarebene in der Form:

$$\sum_1^3{}_k \, a_{3k} X_{30} X_{3k} = 0.$$

Ist aber das Trieder der Fläche konjugiert, so muss diese Ebene identisch sein mit der Ebene $X_3 = 0$, ihre Gleichung sich also auf $a_{33} X_{30} X_3 = 0$ reduzieren, d. h. es muss sein $a_{3h} = 0$, wo $h = 1, 2$. Analoges lässt sich für die Punkte der andern Kanten zeigen, so dass überhaupt folgt: alle $a_{ik} = 0$, wo $i \neq k$. Die Gleichung der Fläche ist alsdann:

$$\sum_1^3{}_i \, a_{ii} X_i^2 = 0.$$

Nun lässt sich auch zeigen, dass diese Fläche ein Kegel 2. O. sein muss. Der letzten Gleichung genügt zunächst die Spitze des Trieders ($X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$). Sind deren homogene Coordinaten x_1, y_1, z_1, p_1, so gilt:

$$X_i (x_1, y_1, z_1, p_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

und ist ferner x_2, y_2, z_2, p_2 ein beliebiger Punkt der Fläche, so ist für diese Coordinaten:

$$\sum_1^3{}_i \, a_{ii} X_i^2 (x_2, y_2, z_2, p_2) = 0.$$

Dann genügt auch jeder Punkt der Verbindungslinie mit den Coordinaten:

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \quad y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \quad z = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2, \quad p = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2$$

der Flächengleichung, denn es ist

$$X_i (x, y, z, p) = \mu_1 X_i (x_1, y_1, z_1, p_1) + \mu_2 X_i (x_2, y_2, z_2, p_2),$$

also:

$$\sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i^2\,(x,y,z,p) = \mu_1^2 \sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i^2\,(x_1,y_1,z_1,p_1) + 2\mu_1\mu_2 \sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i\,(x_1,y_1,z_1,p_1)\cdot X_2\,(x_2,y_2,z_2,p_2)$$
$$+ \mu_2^2 \sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i^2\,(x_2,y_2.\,z_2,p_2),$$

aus welcher Gleichung die rechte Seite wegen der obigen Beziehungen verschwindet. Eine solche Fläche aber ist ein Kegel 2. O.; dieser hat also unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichung:

$$\sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.$$

Ist diese umgekehrt als Gleichung des Kegels gegeben, so folgen Betrachtungen, die den früheren dieses Paragraphen analog sind, dass die Polarebene jedes Kantenpunktes des Coordinatentrieders mit der entsprechenden Gegenebene zusammenfällt. Also ergibt sich:

V. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Trieder einem Kegel 2. O. konjugiert ist, deren Spitze mit der Ecke des Trieders zusammenfällt, ist die, dass der Kegel, bezogen auf dieses als Coordinatentrieder, die Gleichung hat:

$$\sum_1^3 i\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.\text{“}$$

V. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Dreieck einem Kegelschnitt in der Ebene des Dreiecks konjugiert ist, ist die, dass der Kegelschnitt, bezogen auf dieses Dreieck als Coordinatenpolygon, die Gleichung hat:

$$\sum_1^3 i\, a_{ii}\, U_i^2 = 0.\text{“}$$

Durch den vorigen gleiche Betrachtungen gelangt man zu dem entsprechenden Satze über die vierseitige körperliche Ecke.

VI. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine vierseitige körperliche Ecke einem Kegel 2. O. konjugiert ist, dessen Spitze mit der der körperlichen Ecke zusammenfällt, ist die, dass der Kegel, bezogen auf die Seitenflächen der Ecke als Coordinatenebenen die Gleichung hat:

$$\sum_1^4 i\, a_{ii}\, X_i^2 = 0.\text{“}$$

VI. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein ebenes Viereck einem Kegelschnitt in der Ebene des Vierecks konjugiert ist, ist die, dass der Kegelschnitt, bezogen auf die Ecken dieses Vierecks als Coordinatenpunkte die Gleichung hat:

$$\sum_1^4 i\, a_{ii}\, U_i^2 = 0.\text{“}$$

Durch Einführung der Polyeder- und Polygoncoordinaten hat man also, wie man sieht, den Vorteil, die Fläche stets in gleicher Weise nur durch die Summe von drei, vier, fünf, sechs oder acht Quadraten der Coordinaten darstellen zu können, wenn die betreffenden Polyeder der Fläche konjugiert sind. Andrerseits aber kann man auch, wie die Sätze dieses Paragraphen zeigen, aus solchen Gleichungen ohne weiteres die Beziehungen der angewandten Polyeder zu der Fläche ersehen. Diese beiden Resultate sollen uns in ihren Konsequenzen für die Folge bei ihrer Anwendung beschäftigen, denn sie werden uns den

grossen Nutzen der Polyedercoordinaten bei manchen Untersuchungen über Flächen 2. O. zeigen (§§ 4—7). Um aber schon hier ihre bequeme und einfache Handhabung an einem Beispiel zu demonstrieren, möge folgende Anwendung gegeben werden.

In Bezug auf ein Polartetraeder hat die Fläche $F = 0$ die Gleichung

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv \sum_1^4 i\, \mu_i X_i^2 = 0.$$

Ist das Tetraeder zugleich Polartetraeder einer zweiten Fläche $G = 0$, so ist deren Gleichung

$$G(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv \sum_1^4 i\, \nu_i X_i^2 = 0.$$

Das Flächenbüschel, welches durch die beiden Flächen bestimmt ist, wird dann dargestellt durch:

$$F + \lambda G \equiv \sum_1^4 i\, (\mu_i + \lambda \nu_i) X_i^2 = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung ergibt sich aber nach I sofort der Satz:

„Ist ein Tetraeder Polartetraeder zweier Flächen, so ist es auch gemeinsames Polartetraeder aller Flächen des durch die beiden ersten gebildeten Flächenbüschels“.

„Ist ein Tetragon Polviereck zweier Flächen, so ist es auch gemeinsames Polviereck aller Flächen der durch die beiden ersten gebildeten Flächenschar.“

Dieser Satz ist ja schon bekannt, die einfache Beweisführung aber verdankt er allein den Polyedercoordinaten. Wie sofort einleuchtet, gibt die gleiche Anwendung der Sätze II, III und IV dieses Paragraphen die analogen Sätze für Polarpentaeder, -hexaeder und -octaeder, deren Beweis sonst schon sehr kompliziert wäre.

Anhangsweise seien noch einige Formen der Flächengleichung [1]) erwähnt, auf deren Anwendung weiterhin nicht eingegangen werden soll, die hier aber auch geeignet sind, den Nutzen der behandelten Coordinaten darzutun, denn auch sie gestatten uns, aus ihnen wieder sofort die Lagebeziehung des angewandten Coordinatenpolyeders zu der Fläche abzulesen. Nennt man

„ein Polyeder einer Fläche einbeschrieben, wenn die Schnittpunkte von je drei aufeinander folgenden Ebenen auf der Fläche liegen“,

„ein Polygon einer Fläche umbeschrieben, wenn die Verbindungsebenen von je drei auf einander folgenden Ecken die Fläche berühren“,

so gelten folgende Sätze:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Tetraeder einer Fläche einbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses Tetraeder die Gleichung hat:

$$\sum_{ik} a_{ik} X_i X_k = 0,\ i \neq k,\ \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4. \end{matrix}$$

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Viereck einer Fläche umbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses Tetragon, die Gleichung hat:

$$\sum_{ik} a_{ik} U_i U_k = 0,\ i \neq k,\ \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4. \end{matrix}$$

[1]) Serret, p. 52.

Die notwendige und hinreichende Bedindingung dafür, dass ein Pentaeder einer Fläche einbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses, die Gleichung hat:

$$a_{13}X_1X_3 + a_{24}X_2X_4 + a_{35}X_3X_5 + a_{41}X_4X_1 + a_{52}X_5X_2 = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Hexaeder oder ein hexagonales Octaeder der Fläche einbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf das entsprechende Polyeder, die Gleichung hat:

$$a_{14}X_1X_4 + a_{25}X_2X_5 + a_{36}X_3X_6 = 0$$

oder:

$$a_{15}X_1X_5 + a_{26}X_2X_6 + a_{37}X_3X_7 + a_{48}X_4X_8 = 0.“$$

Die notwendige und hinreichende Bedindingung dafür, dass ein Pentagon einer Fläche umbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf dieses, die Gleichung hat:

$$a_{13}U_1U_3 + a_{24}U_2U_4 + a_{35}U_3U_5 + a_{41}U_4U_1 + a_{52}U_5U_2 = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Hexagon oder ein hexaedrisches Octogon der Fläche einbeschrieben ist, ist die, dass die Fläche, bezogen auf das entsprechende Polygon, die Gleichung hat:

$$a_{14}U_1U_4 + a_{25}U_2U_5 + a_{36}U_3U_6 = 0$$

oder:

$$a_{15}U_1U_5 + a_{26}U_2U_6 + a_{37}U_3U_7 + a_{48}U_4U_8 = 0.“$$

Die Sätze dieses Paragraphen über Polarpolyeder und -polygone sollen uns noch weiter beschäftigen, indem wir sie kombinieren mit den drei verschiedenen quadratischen Identitätensätzen, die Serret in seiner „géométrie de direction“ über die „nach dem Modul zwei associierten“ Gebilde entwickelt. Es soll nämlich gezeigt werden, wie er aus diesen beiden Gruppen von Sätzen durch wechselseitige Anwendung mehrere wichtige Theoreme aus der Theorie der Flächen 2. Kl. und 2. O. ausserordentlich bequem und einfach beweisen kann.

§ 3.

Quadratische Identität zwischen 10 nach dem Modul 2 associierten Ebenen resp. Punkten und daraus folgende Sätze.

Eine Fläche 2. Kl. ist, wie bekannt, durch neun Ebenen vollkommen eindeutig bestimmt, wenn diese neun Ebenen nicht alle derselben Raumkurve 4. Kl. angehören. Neun beliebige Ebenen sind daher im allgemeinen stets gemeinsame Ebenen einer Fläche 2. Kl. Wenn aber eine zehnte Ebene auch noch dieselbe Fläche 2. Kl. berühren soll, so darf diese nicht mehr ganz willkürlich gegeben sein, sondern muss von den neun andern in gewisser Weise abhängig sein. Diese Abhängigkeit möge zunächst ausgedrückt werden durch folgende Definition:

„Zehn Ebenen, die alle einer und derselben Fläche 2. Kl. als Tangentialebenen angehören (von denen also die zehnte dieselbe Fläche berührt, die durch die neun anderen bestimmt wird), heissen nach dem Modul 2 associiert.

„Zehn Punkte, die alle einer und derselben Fläche 2. O. angehören (von denen also der zehnte auf derselben Fläche liegt, die durch die neun anderen bestimmt wird), heissen nach dem Modul 2 associiert.“

Zwischen den Coordinaten solcher zehn Ebenen:

(1) $$E_i \equiv u_i x + v_i y + w_i z + q_i p = 0, \quad i = 1, 2, \ldots 10$$

besteht die notwendige und hinreichende Bedingung:

(2) .... $$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & q_1^2 & v_1 w_1 & w_1 u_1 & u_1 v_1 & u_1 q_1 & v_1 q_1 & w_1 q_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_2 q_2 & w_2 q_2 \\ \vdots \\ u_{10}^2 & v_{10}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{10} q_{10} & w_{10} q_{10} \end{vmatrix} = 0$$ [1]),

aus der das Bestehen der zehn Gleichungen folgt:

(3) $$\sum_1^{10} i\, \lambda_i u_i^2 = 0, \quad \sum_1^{10} i\, \lambda_i v_i^2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \sum_1^{10} i\, \lambda_i w_i q_i = 0.$$

Durch Multiplikation mit resp.

$$x^2, \; y^2, \; \ldots\ldots \; 2zp$$

und durch Addition der entstandenen Produkte erhält man unter Berücksichtigung von (1) die Identität:

(4') $$\sum_1^{10} i\, \lambda_i E_i^2 \equiv 0.$$

Nimmt man jetzt die Ebenen E_i als Coordinatenebenen, so folgt hieraus, da $\varrho X_i = E_i$,

(4) $$\sum_1^{10} i\, \lambda_i X_i^2 \equiv 0.$$

Umgekehrt kann man von (4) auch wieder zu (2) kommen. Denn (4) und (4') sind nur um einen Faktor verschieden. Aus (4') folgt die gleichzeitige Existenz der zehn Gleichungen (3) und diese haben zur Folge die Gleichung (2), die notwendige und hinreichende Bedingung für 10 Ebenen, die nach dem Modul 2 associiert sind. Also erhalten wir:

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass 10 Ebenen nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polyedercoordinaten eines Punktes die Identität besteht:

(4) $$\sum_1^{10} i\, \lambda_i X_i^2 \equiv 0."$$

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass 10 Punkte nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polygoncoordinaten einer Ebene die Identität besteht:

(4) $$\sum_1^{10} i\, \lambda_i U_i^2 \equiv 0."$$

Um nun diesen Satz, wie oben erwähnt, mit den Sätzen über Polarpolyeder des vorigen Paragraphen zu kombinieren, seien noch folgende Erwägungen angestellt:

---

[1]) Heger, Die Konstruktion der Fläche 2. O. aus 9 gegebenen Punkten und verwandte Aufgaben. Leipzig 1881. S. XXVIII. Nr. 68, 1.

A. Teilt man die Identität (4) folgendermassen:

$$\sum_1^2 {}^{h} \lambda_h X_h^2 \equiv - \sum_3^{10} {}^{k} \lambda_k X_k^2, \tag{5}$$

und setzt jede einzelne Seite gleich Null, so stellen die beiden entstehenden Gleichungen:

$$\sum_1^2 {}^{h} \lambda_h X_h^2 = 0; \quad \sum_3^{10} {}^{k} \lambda_k X_k^2 = 0 \tag{6}$$

nach § 1, XI' 2 Flächen 2. O. dar, die aber wegen (5) identisch sind. Aus der zweiten Gleichung (6) dieser Fläche folgt nach § 2, IV, dass ihr das hexagonale Octaeder der Ebenen $E_3 = 0$, $E_4 = 0$, . . . $E_{10} = 0$ konjugiert ist. Die erste Gleichung (6) von der Form:

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = 0$$

löst sich in die beiden Gleichungen auf:

$$\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 = 0; \ \mu_1 X_1 - \mu_2 X_2 = 0 \tag{6'}$$

und zeigt also nach § 1, IX, dass die Fläche in ein Ebenenpaar zerfällt, welches zu den Ebenen $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ konjugiert harmonisch ist. Denn $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ wie auch die beiden Gleichungen (6') unterscheiden sich nur um einen Faktor von den Gleichungen der Ebenen:

$$E_1 = 0, \ E_2 = 0, \ \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 = 0, \ \mu_1 E_1 - \mu_2 E_2 = 0,$$

stellen also dieselben Ebenen dar; das aber sind vier harmonische Ebenen.[1]) Mit Berücksichtigung der Definition der zehn associierten Ebenen erhält man daher den Satz:

II. „Ein Ebenenpaar und ein hexagonales Octaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben sind, sind beide einer und derselben in ein Ebenenpaar mit der Axe des gegebenen zerfallenden Fläche 2. O. konjugiert."

II. „Ein Punktepaar und ein hexaedrisches Octogon, die beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben sind, sind beide einer und derselben in ein Punktepaar auf der Geraden des gegebenen zerfallenden Fläche 2. Kl. konjugiert."

Aus unseren Gleichungen aber folgt ohne weiteres auch die Umkehrung unseres Satzes. Geht man nämlich von den Gleichungen (6) aus, die zwei Flächen darstellen, welche dem Ebenenpaar $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und dem hexagonalen Octaeder konjugiert sind, und setzt durch (5) die beiden Flächen identisch, so ergiebt sich daraus wieder die Identität (4), die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die zehn Ebenen derselben Fläche 2. Kl. angehören. Also gilt auch:

II'. „Ein Ebenenpaar und ein hexagonales Octaeder, die beide einem und demselben Ebenenpaar mit der Axe des gegebenen konjugiert sind, sind einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben."

II'. „Ein Punktepaar und ein hexaedrisches Octogon, die beide einem und demselben Punktepaar in der Geraden des gegebenen konjugiert sind, sind einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben."

[1]) Hesse, Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes. 3. Auflage. Leipzig 1876. S. 29.

Hierbei ist zu beachten, dass man die Definition eines hexagonalen Octaeders, das einem Ebenenpaar konjugiert ist, klarer in folgender Form gibt:

„Ein hexagonales Octaeder ist einem Ebenenpaar konjugiert, wenn je 2 Ebenen, die durch die Axe des Ebenenpaares und zwei Gegenecken des Octaeders gelegt werden, zu den beiden gegebenen Ebenen harmonisch sind.“

„Ein hexaedrisches Octogon ist einem Punktepaar konjugiert, wenn je zwei Schnittpunkte der Geraden des Punktepaares mit zwei Gegenebenen des Octogones zu den beiden gegebenen Punkten harmonisch sind.“

B. Durch die Teilung der zehn nach dem Modul zwei associierten Ebenen in zwei andere Gruppen entsteht ein weiteres Theorem aus I. Zerlegt man nämlich die Identität (4) in:

$$\sum_{1}^{4}{}_h \lambda_h X_h^2 \equiv - \sum_{5}^{10}{}_k \lambda_k X_k^2 \tag{7}$$

und bildet wieder die Gleichungen

$$\sum_{1}^{4}{}_h \lambda_h X_h^2 = 0 \text{ und } \sum_{5}^{10}{}_k \lambda_k X_k^2 = 0, \tag{8}$$

so stellen beide wegen (7) dieselbe Fläche 2. O. dar, die wie ihre beiden Gleichungsformen (8) zeigen, dem Tetraeder der Ebenen $X_1 = 0, \ldots, X_4 = 0$ und dem Hexaeder der Ebenen $X_5 = 0, \ldots, X_{10} = 0$ gleichzeitig konjugiert ist (§ 2, I und III). Somit erhält man:

III. „Ein Tetraeder und ein Hexaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben, sind gleichzeitig beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert.“

III. „Ein Tetragon und ein Hexagon, die beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben, sind gleichzeitig einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert.

Aus den Gleichungen (8) kommt man durch die Bestimmung (7) wieder zu der Identität (4); das beweist die Umkehrung:

III'. Ein Tetraeder und ein Hexaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben.“

III'. „Ein Tetragon und ein Hexagon, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben.“

C. Teilt man endlich die Identität (4) wie folgt:

$$\sum_{1}^{5}{}_h \lambda_h X_h^2 \equiv - \sum_{6}^{10}{}_k \lambda_k X_k^2, \tag{9}$$

so liefern uns die beiden Seiten, gleich Null gesetzt:

$$\sum_{1}^{5}{}_h \lambda_h X_h^2 = 0 \text{ und } \sum_{6}^{10}{}_k \lambda_k X_k^2 = 0, \tag{10}$$

wegen (9) dieselbe Fläche 2. O., der, wie aus den Formen der Gleichungen (10) nach § 2, II, folgt, die beiden Pentaeder der Ebenen $X_1 = 0, \ldots X_5 = 0$ und $X_6 = 0, \ldots X_{10} = 0$ konjugiert sind. Es ergiebt sich also der Satz:

IV. „Zwei Pentaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben sind, sind auch beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert."

IV. „Zwei Pentagone, die beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben sind, sind auch beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert."

Umgekehrt führen uns die beiden Gleichungen (10) unter der Bedingung (9) wieder zu (4), was die Umkehrung beweist:

IV'. „Zwei Pentaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, sind gleichzeitig einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben."

IV'. Zwei Pentagone, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind, sind gleichzeitig einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben."

Nun ist noch eine Teilung der Identität möglich, die einen Sinn haben würde: die Zerlegung des Systems der zehn Ebenen in die beiden Gruppen von drei und sieben Ebenen. Diese aber ist hier zwecklos, weil unfruchtbar. Denn unsere Sätze handeln hier immer von Polarbeziehungen der durch die Teilung der zehn Ebenen entstehenden Polyeder zu Flächen 2. O., und eine solche Beziehung lässt sich von einem Heptaeder nicht angeben.

Aber da zehn ganz beliebige Ebenen einer Fläche 2. Kl. zehn nach dem Modul 2 associierte Ebenen sind, so kann man auch solche zehn Ebenen betrachten, von denen vier durch einen Punkt gehen. Die entsprechenden Formeln bleiben dieselben wie in B, auch bei der Teilung in diese vier Ebenen und ein Hexaeder, nur kommt eben die eine Bedingung für die vier Ebenen hinzu. Dann folgt aber nach § 2, VI, dass die Fläche 2. O. in einen Kegel zerfällt. Man erhält somit aus III und III' dieses Paragraphen folgende beiden speziellen Sätze, aus denen Serret eine wichtige Anwendung ableitet:

„Ein Hexaeder und eine körperliche vierseitige Ecke, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegel 2. O. konjugiert, der mit der körperlichen Ecke die Spitze gemein hat."

„Ein Hexagon und ein ebenes Viereck, die beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Vierecks konjugiert."

und:

„Ein Hexaeder und eine körperliche vierseitige Ecke, die beide einem und demselben Kegel mit der Spitze der körperlichen Ecke konjugiert sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben."

„Ein Hexagon und ein ebenes Viereck, die beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Vierecks konjugiert sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. O. einbeschrieben."

Während nämlich die vorhergehenden Sätze dieses Paragraphen eigentlich nur theoretisches Interesse für Serret haben — wenn man diese Unterscheidung machen darf —, so zeigt ihm dieses letzte Theorem eine praktische Anwendung. Serret weist nämlich nach,[1]) wie sich hieraus die Konstruktion einer zehnten Ebene ableiten lässt, wenn neun gegeben sind, er giebt also die Konstruktion einer Fläche 2. Kl. aus neun Ebenen mit Hülfe dieses letzten speziellen Satzes. Die Konstruktion selbst werde hier übergangen; wichtig ist für uns nur, dass auch solcher Nutzen aus der Anwendung der Polyeder-coordinaten fliesst.

---

[1]) Serret, p. 453.

§ 4.

Quadratische Identität zwischen 9 nach dem Modul 2 associierten Ebenen resp. Punkten und daraus folgende Sätze.

Neun Ebenen bestimmen im allgemeinen eine Fläche 2. Kl. vollständig. Sind dagegen nur acht gegeben, so giebt es ∞^1 Flächen 2. Kl., die diese acht Ebenen gemeinsam haben und eine Flächenschar bilden. Alle Flächen dieser Schar haben aber nicht nur diese acht Ebenen gemein, sondern gleichzeitig alle Ebenen einer ganzen Raumcurve 4. Kl., der auch die acht Ebenen angehören und die durch sie bestimmt ist.[1]) Soll also noch eine neunte Ebene der Raumcurve angehören, so muss sie von den andern acht Ebenen abhängig sein. Diese Beziehung möge zunächst ausgedrückt werden durch folgende Definition:

„Neun Ebenen heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie alle einer und derselben Raumcurve 4. Kl. angehören, die schon durch acht von ihnen bestimmt wird.“

„Neun Punkte heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie alle einer und derselben Raumcurve 4. O. angehören, die schon durch acht von ihnen bestimmt wird.“

Damit neun Ebenen:

$$E_i \equiv u_i x + v_i y + w_i z + q_i p = 0, \quad i = 1, 2, \ldots 9 \tag{1}$$

einer und derselben Raumcurve 4. Kl. gemeinsam sind, muss zwischen ihren Coordinaten die notwendige und hinreichende Bedingung bestehen:

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & q_1^2 & v_1 w_1 & w_1 u_1 & u_1 v_1 & u_1 q_1 & \varrho v_1 q_1 + \sigma w_1 q_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_2 q_2 & \varrho v_2 q_2 + \sigma w_2 q_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ u_9^2 & v_9^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & u_9 q_9 & \varrho v_9 q_9 + \sigma w_9 q_9 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

unabhängig von dem Verhältnis $\varrho : \sigma$, woraus das System der Gleichungen folgt:

$$\sum_1^9 {}_i \lambda_i u_i^2 = 0, \quad \sum_1^9 {}_i \lambda_i v_i^2 = 0, \ldots\ldots, \quad \sum_1^9 {}_i \lambda_i u_i q_i = 0, \quad \sum_1^9 {}_i \lambda_i (\varrho v_i q_i + \sigma w_i q_i) \equiv 0. \tag{3}$$

Von diesen löst sich die letzte, da sie identisch in ϱ und σ gilt, in die beiden folgenden auf:

$$\sum_1^9 {}_i \lambda_i v_i q_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_1^9 {}_i \lambda_i w_i q_i = 0. \tag{4}$$

Durch die gleichen Operationen, wie in § 3, erhält man aus den ersten acht Gleichungen (3) und den beiden Gleichungen (4) die Identität:

$$\sum_1^9 {}_i \lambda_i X_i^2 \equiv 0. \tag{5}$$

[1]) Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. S. 140.

Ebenso wie in § 3 lässt sich auch hier wieder zeigen, dass man auch wieder von der Identität (5) zu der Bedingungsgleichung (2) kommen kann. Man erhält also folgendes Kriterium:

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass neun Ebenen nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polyeder-coordinaten eines beliebigen Punktes die Identität besteht:

(5) $$\sum_1^9 \lambda_i X_i^2 \equiv 0.“$$

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass neun Punkte nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polygon-coordinaten einer beliebigen Ebene die Identität besteht:

$$\sum_1^9 \lambda_i U_i^2 \equiv 0.“$$

Durch Kombination dieses Resultats mit den Sätzen des § 2 erhalten wir mit Serret wieder mehrere Sätze über geometrische Eigenschaften solcher neun Punkte.

A. Teilt man nämlich die Identität (5) folgendermassen:

(6) $$\sum_1^3 \lambda_h X_h^2 \equiv - \sum_4^9 \lambda_k X_k^2$$

und bildet aus deren beiden Seiten die beiden Gleichungen:

(7) $$\sum_1^3 \lambda_h X_h^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_4^9 \lambda_k X_k^2 = 0,$$

so stellen diese wegen (6) dieselbe Fläche 2. O. dar, der, wie aus ihrer zweiten Gleichung (7) folgt, das Hexaeder der Ebenen $E_4 = 0, \ldots . E_9 = 0$ konjugiert ist. Die erste Gleichung (7) zeigt aber nach § 2, V., dass diese Fläche in einen Kegel 2. O. mit der Ecke des Trieders $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ als Spitze degeneriert, welchem das Trieder konjugiert ist. Man erhält also den Satz:

II. „Ein Trieder und ein Hexaeder, die beide einer und derselben Raumkurve 4 Kl. umbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegel 2. O. konjugiert, welcher als Spitze die Ecke des Trieders hat.“

II. „Ein Dreieck und ein Hexagon, die beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Dreiecks konjugiert.“

Da man von den Gleichungen (7) mit der Voraussetzung (6) wieder zu der Identität (5) kommt, so gilt auch die Umkehrung:

II'. Ein Trieder und ein Hexaeder, die beide einem und demselben Kegel 2. O. mit der Ecke des Trieders als Spitze konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4 Kl. umbeschrieben.

II'. „Ein Dreieck und ein Hexagon, die beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Dreiecks konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben.

B. Durch Teilung der Identität (5) in

$$\sum_1^4 {}_h \lambda_h X_h^2 \equiv - \sum_5^9 {}_k \lambda_k X_k^2$$

und die weiteren schon mehrmals gemachten Überlegungen erhält man unter Berücksichtigung von § 2, I und II den Satz:

III. „Ein Tetraeder und ein Pentaeder, die beide einer und derselben Raumkurve 4. Kl. umbeschrieben sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert."

III. „Ein Tetragon und ein Pentagon, die beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben sind, sind beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert."

Und die Umkehrung:

III'. „Ein Tetraeder und ein Pentaeder, die beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4. Kl. umbeschrieben."

III'. „Ein Tetragon und ein Pentagon, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben."

Die noch mögliche Sonderung der neun Ebenen in zwei Gruppen von zwei und sieben ist hier nicht angebracht, weil, wie schon früher erwähnt, das entstehende Heptaeder keine weiteren Schlüsse zulässt. Andrerseits führt uns Serret auch bei den neun nach dem Modul 2 associierten Ebenen wieder einen Spezialfall vor, der vollkommen demjenigen bei den zehn Ebenen einer Fläche 2. Kl. entspricht. Gehen nämlich von den neun Ebenen vier durch einen Punkt, so degeneriert die Fläche, der nach III das Tetraeder konjugiert ist, nach § 2, VI in einen Kegel 2. O.; man erhält somit aus Satz III und III' dieses Paragraphen die beiden:

„Ein Pentaeder und eine vierseitige körperliche Ecke, die beide einer und derselben Raumkurve 4. Kl. umbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegel 2. O. mit dem Eckpunkte der körperlichen Ecke als Spitze konjugiert."

„Ein Pentagon und ein ebenes Viereck, die beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Vierecks konjugiert."

und

„Ein Pentaeder und eine vierseitige körperliche Ecke, die beide einem und demselben Kegel 2. O. mit dem Eckpunkt der körperlichen Ecke als Spitze konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4. Kl. umbeschrieben."

„Ein Pentagon und ein ebenes Viereck, die beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Vierecks konjugiert sind, sind beide einer und derselben Raumkurve 4. O. einbeschrieben."

Wieder ist es, wie schon bei den zehn associierten Ebenen, dieser letzte spezielle Satz, der Serret das Mittel an die Hand gibt, eine Reihe von Konstruktionen zu lösen, die sich auf Probleme der Raumkurven 4. Kl. resp. 4. O. beziehen. So zeigt er z. B. ausführlich, wie dieser Anwendung findet bei der Konstruktion des neunten Punktes, also

der ganzen Raumkurve 4. O., wenn acht Punkte gegeben sind, ferner zeigt er im Anschluss daran die Konstruktion der Tangente, Schmiegungsebene und des Schmiegungskreises [1]; die entsprechenden Konstruktionen bei der Raumkurve 4. Kl. deutet er nur an mit Hinweis auf die für den dualen Fall gegebenen. Alle diese Erörterungen und Konstruktionen sollen aber hier übergangen werden, da sie in ihren Einzelheiten für die Theorie der in Rede stehenden Coordinaten keine neuen Gesichtspunkte bieten.

§ 5.

Quadratische Identität zwischen 8 nach dem Modul 2 associierten Ebenen resp. Punkten und daraus folgende Sätze.

Sind sieben Ebenen im Raume gegeben, so gibt es ∞^2 Flächen 2. Kl., die diese Ebenen gemeinsam haben: die sämtlichen Flächen der durch die sieben Ebenen bestimmten Flächenscharschar 2. Kl. Diese aber haben alle noch eine achte Ebene gemein, die durch die sieben andren bestimmt wird. [2]) Sollen daher acht Ebenen gleichzeitig zu allen Flächen einer Scharschar gehören, so müssen sie in bestimmter Abhängigkeit stehen. Diese soll ausgedrückt werden durch die Definition:

„Acht Ebenen heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie das System aller sämtlichen Flächen einer Scharschar gemeinsamer Ebenen bilden."

„Acht Punkte heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie das Schnittpunktsystem von sämtlichen Flächen eines Flächenbündels sind."

Da drei Flächen 2. Kl. schon die sämtlichen acht Ebenen bestimmen, kann man die Definition auch aussprechen, wie folgt:

„Acht Ebenen heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie das dreien Flächen 2. Kl. gemeinsame System von Tangentialebenen sind."

„Acht Punkte heissen nach dem Modul 2 associiert, wenn sie das dreien Flächen 2. O. gemeinsame Schnittpunktsystem darstellen."

Zwischen den Coordinaten von acht solchen Ebenen:

$$(1) \qquad E_i = u_i x + v_i y + w_i z + q_i p = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots 8,$$

besteht die notwendige und hinreichende Bedingung:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & q_1^2 & v_1 w_1 & w_1 u_1 & u_1 v_1 & \varrho u_1 q_1 + \sigma v_1 q_1 + \tau w_1 q_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varrho u_2 q_2 + \sigma v_2 q_2 + \tau w_2 q_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_8^2 & v_8^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varrho u_8 q_8 + \sigma v_8 q_8 + \tau w_8 q_8 \end{vmatrix} = 0 \text{ [3])}$$

---

[1]) Vergl. Serret, p. 373—375, p. 379—390.

[2]) Hesse. Verlesungen über analytische Geometrie des Raumes. S. 144.

[3]) Heger: Die Konstruktion der Fläche 2. O. etc. S. XXX, Nr. 71, 2.

unabhängig von den Verhältnissen $\varrho:\sigma:\tau$. Hieraus ergiebt sich das System der Gleichungen:

$$(3)\qquad \sum_1^8 {}_i \lambda_i u_i^2 = 0;\quad \sum_1^8 {}_i \lambda_i v_i^2 = 0;\ \ldots\ldots,\quad \sum_1^8 {}_i \lambda_i (\varrho\, u_i q_i + \sigma v_i q_i + \tau w_i q_i) \equiv 0,$$

von denen die letzte, da sie identisch in ϱ, σ und τ gilt, sich in die drei folgenden zerlegen lässt:

$$(4)\qquad \sum_1^8 {}_i \lambda_i w_i q_i = 0;\quad \sum_1^8 {}_i \lambda_i v_i q_i = 0;\quad \sum_1^8 {}_i \lambda_i w_i q_i = 0,$$

Aus den drei Gleichungen (4) und den sieben ersten von (3) erhält man ebenso wie in § 3 die Identität:

$$(5)\qquad \sum_1^8 {}_i \lambda_i X_i^2 \equiv 0.$$

Umgekehrt kann man aus (5) wieder zu der Bedingungsgleichung (2) kommen. Man erlangt also den Satz:

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass acht Ebenen nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polyedercoordinaten eines beliebigen Punktes die Identität besteht:

$$(5)\qquad \sum_1^8 {}_i \lambda_i X_i^2 \equiv 0.\text{“}$$

I. „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass acht Punkte nach dem Modul 2 associiert sind, ist die, dass zwischen den auf sie bezogenen Polygoncoordinaten einer beliebigen Ebene die Identität besteht:

$$\sum_1^8 {}_i \lambda_i U_i^2 \equiv 0.\text{“}$$

Auch aus diesem Satze erhält Serret durch Kombination mit denen von § 2 wieder mehrere Probleme über acht associierte Punkte.

A. Durch die Teilung der Identität (5) in:

$$\sum_1^2 {}_h \lambda_h X_h^2 \equiv -\sum_3^8 {}_k \lambda_k X_k^2$$

und die aus den beiden Seiten gebildeten Gleichungen:

$$\sum_1^2 {}_h \lambda_h X_h^2 = 0 \quad\text{und}\quad \sum_3^8 {}_k \lambda_k X_k^2 = 0$$

erhält man analog wie in § 3, A mit Hülfe des Satzes § 2, III das Resultat:

II. „Ein Ebenenpaar und ein Hexaeder, deren Flächen acht nach dem Modul 2 associierte Ebenen sind, sind einem und demselben Ebenenpaar mit der Axe des gegebenen konjugiert.“

II. „Ein Punktepaar und ein Hexagon, deren Ecken acht nach dem Modul 2 associierte Punkte sind, sind einem und demselben Punktepaar in der Geraden des gegebenen konjugiert.“

Analog ergibt sich auch die Umkehrung:

II'. „Ein Ebenenpaar und ein Hexaeder, die beide einem und demselben Ebenenpaar mit der Axe des gegebenen konjugiert sind, sind zusammen drei Flächen 2. Kl. umbeschrieben."

II'. „Ein Punktepaar und ein Hexagon, die beide einem und demselben Punktepaar auf der Geraden des gegebenen konjugiert sind, sind zusammen drei Flächen 2. O. gemeinsam einbeschrieben."

Aus diesem Satze ergibt sich also eine Art der Konstruktion des achten associierten Punktes aus sieben gegebenen.[1])

B. Teilt man weiter (5) in:

$$\sum_{1}^{3} {}_h \lambda_h X_h^2 \equiv -\sum_{4}^{8} {}_k \lambda_k X_k^2$$

und bildet wieder daraus zwei Gleichungen:

$$\sum_{1}^{3} {}_h \lambda_h X_h^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{4}^{8} {}_k \lambda_k X_k^2 = 0,$$

so erfolgt wieder nach § 2, II und V der Satz:

III. „Ein Trieder und ein Pentaeder, die beide drei Flächen 2. Kl. gemeinsam umbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegel 2. O. mit der Ecke des Trieders als Spitze konjugiert."

III. „Ein Dreieck und ein Pentagon, die beide drei Flächen 2. O. gemeinsam einbeschrieben sind, sind beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Dreiecks konjugiert."

und die Umkehrung:

III'. „Ein Trieder und ein Pentaeder, die beide einem und demselben Kegel 2. O. mit der Ecke des Trieders als Spitze konjugiert sind, bilden die acht gemeinsamen Ebenen von drei Flächen 2. Kl."

III'. „Ein Dreieck und ein Pentagon, die beide einem und demselben Kegelschnitt in der Ebene des Dreiecks konjugiert sind, enthalten als Ecken zusammen die acht gemeinsamen Schnittpunkte von drei Flächen 2. O."

Diese letztere giebt Serret wieder ein Mittel, den achten assoziierten Punkt zu finden aus sieben gegebenen[2]). Er zeigt, wie sich aus diesem Satze eine Konstruktion ergiebt, die sich fast gänzlich in einer Ebene ausführen lässt und uns daher sehr bequem zum Ziele führt. Ebenso kann auch die achte Ebene gefunden werden, wenn sieben gegeben sind[3]).

C. Durch die Teilung der Identität (5) in zwei gleiche Gruppen zu je vier Gliedern und die daraus gebildeten entsprechenden Gleichungen erhält man endlich den schon von Hesse angegebenen Satz:

---

[1]) Serret: p. 313.
[2]) Serret, p. 314—316.
[3]) Serret, p. 349.

IV. „Die acht gemeinsamen Ebenen von drei Flächen 2. Kl. bilden zu je vier zwei Tetraeder, die beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind.“

IV. „Die acht Schnittpunkte von drei Flächen 2. O. bilden zu je vier zwei Tetragone, die beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind.“

nebst der Umkehrung:

IV'. Die acht Ebenen von zwei Tetraedern, welche beide einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, sind die acht gemeinsamen Ebenen von drei Flächen 2. Kl.

IV'. „Die acht Ecken von zwei Tetragonen, welche beide einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind, sind die acht Schnittpunkte von drei Flächen 2. O.“

Auf den Hesseschen Beweis dieser beiden Sätze soll später noch ausführlicher eingegangen werden.

Anmerkung: Die Identität (5) liefert Serret mit genau denselben Gleichungen, wie sie zu den Sätzen II, III und IV nebst deren Umkehrungen gehören, noch andere Sätze. Er folgert aus ihr nämlich noch einige Eigenschaften von Raumkurven 3. O. und 3. Kl. und daran anschliessend ergeben sich ihm noch entsprechende Konstruktionen.[1]) Unsere Coordinaten sind daher auch ein brauchbares Mittel zur Behandlung einiger Probleme über die genannten Raumkurven.

§ 6.

Weitere Anwendungen der Polyeder- und Polygoncoordinaten.

In den letzten Paragraphen hat sich die grosse Fruchtbarkeit der Polyeder- und Polygoncoordinaten gezeigt: allein aus den drei Identitäten und den Sätzen des § 2 haben sich eine Menge verschiedener Sätze ergeben, deren innerer Zusammenhang durch diese Art der Behandlung recht klar vor Augen tritt. Zwar eignet sich diese Betrachtungsweise mit Hülfe der genannten Coordinaten nicht für alle Untersuchungen über Flächen 2. O. und 2. Kl., z. B. nicht da, wo es sich darum handelt, bestimmte Eigenschaften spezieller Flächen zu entwickeln, denn aus den Gleichungsformen der Flächen in Polyeder- oder Polygoncoordinaten kann man nicht ersehen, welche spezielle Art von Flächen vorliegt; aber in Fällen, wo es nur auf allgemeine Lagebeziehungen zwischen Flächen und angewandten Coordinatenpolyedern oder -polygonen ankommt, sind diese Coordinaten von grossem Vorteil. Diesen zeigten schon die Entwicklungen der letzten Paragraphen mit ihren aus den Identitäten abgeleiteten Sätzen. Um aber noch weiter diesen Nutzen in derartigen Betrachtungen darzutun, und die ausserordentlich leichte und bequeme Handhabung unserer Coordinaten bei ähnlichen Problemen zu zeigen, sollen noch weiter einige Theoreme mit Hülfe der entwickelten Sätze bewiesen werden, die Reye teils ohne weiteren Beweis angegeben hat.[2]) Dabei sind wieder die dualen hinzugefügt worden, die er nicht besonders angeführt hat.

---

[1]) Vergl. Serret, p. 323 und folgende, sowie p. 351 und folgende.

[2]) Reye: Über Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarysteme, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 77, S. 287 und 288. 1874.

I. Ein gemeinschaftliches Polhexaeder von drei beliebigen Flächen 2. O. ist zugleich Polhexaeder von jeder anderen Fläche 2. O., welche dem durch die drei Flächen bestimmten Bündel angehört.

I. Ein gemeinschaftliches Polhexagon von drei beliebigen Flächen 2. Kl. ist zugleich Polhexagon von jeder anderen Fläche 2. Kl., welche der durch die drei Flächen bestimmten Scharschar angehört.

Sind $F=0$, $G=0$, $H=0$ die drei Flächen 2. O., so sind ihre Gleichungen, bezogen auf das gemeinschaftliche Polhexaeder nach § 2, III

$$F=0: \quad \sum_1^6{}_i \lambda_i X_i^2 = 0.$$

$$G=0: \quad \sum_1^6{}_i \mu_i X_i^2 = 0.$$

$$H=0: \quad \sum_1^6{}_i \nu_i X_i^2 = 0.$$

Das durch diese drei Flächen bestimmte Flächenbündel ist dann dargestellt durch:

$$F+\varrho G+\sigma H=0$$

oder:

$$\sum_1^6{}_i (\lambda_i+\varrho\mu_i+\sigma\nu_i) X_i^2 = 0,$$

welche Gleichung nach § 2 III aussagt, dass das Coordinatenhexaeder, das ist das Polhexaeder der drei gegebenen Flächen, Polarhexaeder sämtlicher Flächen des Flächenbündels ist.

II. Zwei gemeinschaftlichen Polarpentaedern von zwei verschiedenen Polarsystemen (d. i. Flächen 2. O.) kann allemal eine Raumkurve 4. Kl. einbeschrieben werden.

II. Zwei gemeinschaftlichen Polarpentagonen von zwei verschiedenen Polarsystemen (d. i. Flächen 2. Kl.) kann allemal eine Raumkurve 4. O. umbeschrieben werden.

Die beiden Pentaeder mögen die Ebenen haben: $X_i=0$ und $Y_i=0$, $i=1, 2, .. 5$, und die beiden Flächen 2. O. seien $F=0$ und $G=0$. Wenn die beiden Pentaeder derselben Fläche 2. O. $F=0$ konjugiert sein sollen, so besteht, da sie dann nach § 3, IV' derselben Fläche 2. Kl. einbeschrieben sind, die Identität:

$$\sum_1^5{}_i \lambda_i X_i^2 + \sum_1^5{}_i \mu_i Y_i^2 \equiv 0 \tag{1}$$

oder

$$\frac{1}{\mu_5}\left(\sum_1^5{}_i \lambda_i X_i^2 + \sum_1^4{}_h \mu_h Y_h^2\right) \equiv -Y_5^2. \tag{1'}$$

Wenn sie beide gleichzeitig der zweiten Fläche $G=0$ konjugiert sind, so folgt ebenso:

$$\sum_1^5{}_i \lambda_i' X_i^2 + \sum_1^5{}_i \mu_i' Y_i^2 \equiv 0 \tag{2}$$

oder

(2′) $$\frac{1}{\mu_5'}\left(\sum_1^5 i\, \lambda_i' X_i^2 + \sum_1^4 h\, \mu_h' Y_h^2\right) \equiv - Y_5^2.$$

Aus (1′) und (2′) ergibt sich die Identität:

(3) $$\sum_1^5 i\, k_i X_i^2 + \sum_1^3 l\, \nu_l Y_l^2 + \nu_4 Y_4^2 \equiv 0,$$

welche nach § 4, I aussagt, dass die Ebene $Y_4 = 0$ der durch die acht ersten Ebenen bestimmten Raumkurve 4. Kl., C_4, angehört. Eliminiert man aus (1) und (2) ebenso Y_4, so kommt:

(4) $$\sum_1^5 i\, k_i' X_i^2 + \sum_1^3 l\, \nu_l' Y_l^2 + \nu_5' Y_5^2 \equiv 0,$$

woraus wieder nach § 4, I folgt, dass auch die Ebene $Y_5 = 0$ der Raumkurve C_4 angehört. Mithin ist die Raumkurve 4 Kl. den beiden Pentaedern einbeschrieben.

III. Zwei gemeinschaftlichen Polarhexaedern von drei beliebigen Flächen 2. O. kann allemal eine Fläche 2. Kl. einbeschrieben werden.

III. Zwei gemeinschaftlichen Polarhexagonen von drei Flächen 2. Kl. kann allemal eine Fläche 2. O. umbeschrieben werden.

Die drei Flächen seien $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$ und die Polyedercoordinaten, bezogen auf die beiden Hexaeder, X_i und Y_i, $i = 1, 2, \ldots 5$. Da die Hexaeder der Fläche $F = 0$ konjugiert sind, so hat sie nach § 2, III die Gleichungen in Bezug auf die beiden als Coordinatenpolyeder:

$$\sum_1^6 i\, \lambda_i X_i^2 = 0 \text{ und } \sum_1^6 i\, \mu_i Y_i^2 = 0.$$

Da die beiden Gleichungen dieselbe Fläche darstellen, so erhält man, wenn man für die X_i und Y_i die homogenen Coordinaten einführt, für die linken Seiten der beiden Gleichungen identische Ausdrücke. Es gilt also, wenn man für $-\mu_i$ wieder μ_i setzt:

(1) $$\sum_1^6 i\, \lambda_i X_i^2 + \sum_1^6 i\, \mu_i Y_i^2 \equiv 0.$$

Aus den Bedingungen, dass die beiden Hexaeder ebenfalls den Flächen $G = 0$ und $H = 0$ konjugiert sind, ergeben sich analog die beiden Identitäten

(2) $$\sum_1^6 i\, \lambda_i' X_i^2 + \sum_1^6 i\, \mu_i' Y_i^2 \equiv 0,$$

(3) $$\sum_1^6 i\, \lambda_i'' X_i^2 + \sum_1^6 i\, \mu_i'' Y_i^2 \equiv 0.$$

Eliminiert man aus (1), (2) und (3) die Grössen Y_5 und Y_6, so erhält man:

$$\sum_1^6 i\, k_i X_i^2 + \sum_1^3 h\, \nu_h Y_h^2 + \nu_4 Y_4^2 \equiv 0,$$

eine Identität die nach § 4, I besagt, dass $Y_4 = 0$ ebenfalls die Fläche Φ berührt, die durch die neun ersten Ebenen bestimmt ist. Durch Elimination von Y_4 und Y_6, resp. von Y_4 und Y_5 aus (1), (2) und (3) folgen die beiden Identitäten:

$$\sum_1^6 {}_i k_i' X_i^2 + \sum_1^3 {}_h \nu_h' Y_h^2 + \nu_5' Y_5^2 \equiv 0$$

$$\sum_1^6 {}_i k_i'' X_i^2 + \sum_1^3 {}_h \nu_h'' Y_h^2 + \nu_6'' Y_6^2 \equiv 0.$$

Diese zeigen ebenso, dass auch $Y_5 = 0$ und $Y_6 = 0$ dieselbe Fläche Φ berühren, so dass diese also wirklich den beiden Hexaedern einbeschrieben ist.

IV. Zwei Polarhexaedern, die vier Flächen 2. O. gemeinsam sind, kann allemal eine Raumkurve 4. Kl. einbeschrieben werden.

IV. Zwei Polarhexagonen, die vier Flächen 2. Kl. gemeinsam sind, kann allemal eine Raumkurve 4. O. umbeschrieben werden.

Sind die Polyedercoordinaten in Bezug auf die beiden Hexaeder X_i und Y_i und sind die vier Flächen $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$, $K = 0$, so lässt sich wegen der Beziehung der beiden Sechsfläche zu $F = 0$, diese darstellen durch die beiden Gleichungen:

$$\sum_1^6 {}_i \lambda_i X_i^2 = 0 \text{ und } \sum_2^6 {}_i \mu_i Y_i^2 = 0,$$

woraus folgt mit entgegengesetztem Werte von μ_i

$$(1) \qquad \sum_1^6 {}_i \lambda_i X_i^2 + \sum_1^6 {}_i \mu_i Y_i^2 \equiv 0.$$

Analog ergeben sich aus den Beziehungen der beiden Hexaeder zu den drei andern Flächen $G = 0$, $H = 0$ und $K = 0$ die drei Identitäten:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_1^6 {}_i \lambda_i' \; X_i^2 + \sum_1^6 {}_i \mu_i' \; Y_i^2 \equiv 0 \\ \sum_1^6 {}_i \lambda_i'' \; X_i^2 + \sum_1^6 {}_i \mu_i'' \; Y_i^2 \equiv 0 \\ \sum_1^6 {}_i \lambda_i''' X_i^2 + \sum_1^6 {}_i \mu_i''' Y_i^2 \equiv 0. \end{cases}$$

Aus diesen vier Identitäten (1) erhält man durch Elimination der Grössen Y_4, Y_5 und Y_6 die weitere:

$$(2) \qquad \sum_1^6 {}_i \varkappa_i X_i^2 + \sum_1^2 {}_h \nu_h Y_h^2 + \nu_3 Y_3^2 \equiv 0,$$

woraus man folgert nach § 4, I, dass die Ebene $Y_3 = 0$ die Raumkurve 4. Kl. C_4 berührt, die durch die acht Ebenen $X_i = 0$, $Y_1 = 0$ und $Y_2 = 0$ bestimmt ist.

Eliminiert man aus dem System (1) in gleicher Weise die Ausdrücke Y_3, Y_4 und Y_5, so zeigt die entstehende Identität:

$$\sum_1^6 i\, k_i' X_i^2 + \sum_1^2 h\, \nu_h' Y^2 + \nu_6' Y_6^2 \equiv 0,$$

dass auch die Ebene $Y_6 = 0$ der Raumkurve C_4 angehört. Durch entsprechende Elimination kann man endlich ebenso zeigen, dass auch die Ebenen $Y_4 = 0$ und $Y_5 = 0$ die Kurve C_4 berühren, womit der Satz bewiesen ist.

V. Zweien beliebigen Polarhexaedern und dem einzigen Polarpentaeder von vier Flächen 2. O. lässt sich allemal eine Fläche 2. Kl. einbeschreiben.

V. Zweien beliebigen Polarhexagonen und dem einzigen Polarpentagon von vier Flächen 2. Kl. lässt sich allemal eine Fläche 2. O. umbeschreiben.

Die Coordinaten, bezogen auf die drei verschiedenen Polyeder mögen sein:

$$X_i, Y_i, Z_h, \quad i = 1, 2, \ldots 6; \; h = 1, 2, \ldots 5.$$

Bildet man nun nach § 2, II und III wieder die Gleichungen der Flächen und drückt die Polyedercoordinaten durch die homogenen aus, so sind die linken Seiten der Gleichungen in diesen identisch. Für jede Fläche erhält man drei Gleichungen, für die gilt:

$$\sum_1^6 i\, \lambda_i \; X_i^2 \equiv \sum_1^6 i\, \mu_i \; Y_i^2 \equiv \sum_1^5 h\, \nu_h \; Z_h^2$$

$$\sum_1^6 i\, \lambda_i' \; X_i^2 \equiv \sum_1^6 i\, \mu_i' \; Y_i^2 \equiv \sum_1^5 h\, \nu_h' \; Z_h^2$$

$$\sum_1^6 i\, \lambda_i'' \; X_i^2 \equiv \sum_1^6 i\, \mu_i'' \; Y_i^2 \equiv \sum_1^5 h\, \nu_h'' \; Z_h^2$$

$$\sum_1^6 i\, \lambda_i''' X_i^2 \equiv \sum_1^6 i\, \mu_i''' Y_i^2 \equiv \sum_1^5 h\, \nu_h''' Z_h^2.$$

Aus den acht Identitäten zwischen den X_i und Z_h und dem Y_i und Z_h kann man sieben der Coordinaten eliminieren, z. B. die Z_h sowie Y_5 und Y_6, und erhält dann eine Identität von der Form:

$$\sum_1^6 i\, \varrho_i X_i^2 + \sum_1^3 k\, \sigma_k Y_k^2 + \sigma_4 Y_4^2 \equiv 0,$$

die aussagt, dass die zehn Ebenen $X_i = 0$, $Y_1 = 0, \ldots Y_3 - 0$ und $Y_4 = 0$ eine und dieselbe Fläche 2. Kl. Φ berühren, die man sich durch die ersten neun Ebenen bestimmt denken kann. Durch Elimination der Z_h sowie der Grössen Y_4 und Y_5 folgt ebenso, dass auch die Ebene $Y_6 = 0$ die Fläche Φ berührt. Eliminiert man ferner vier der Ausdrücke Z_h, z. B. $Z_1, \ldots Z_4$, und drei der Y_i, z. B. $Y_4, \ldots Y_6$, so folgt aus der Form der resultierenden Identität:

$$\sum_1^6 i\, \varrho_i' X_i^2 + \sum_1^3 k\, \sigma_k' Y_k^2 + \sigma_5' Z_5^2 \equiv 0,$$

dass auch $Z_5 = 0$ Tangentialebene der Fläche Φ ist, und durch entsprechende Auswahl der zu eliminierenden Grössen kann man endlich ebenso zeigen, dass auch die Ebenen $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ und $Z_4 = 0$ derselben Fläche Φ angehören. Damit ist also bewiesen, dass diese den beiden Hexaedern und dem Pentaeder einbeschrieben ist.

Kapitel II.

Beziehungen von Untersuchungsmethoden Hesses und Reyes zu den Polyeder- und Polygoncoordinaten.

---

§ 7.

Hesses Beweis des Satzes über acht associierte Punkte und Ebenen[1]) und Bemerkungen dazu.

Serret beweist, wie schon erwähnt, im Zusammenhang seiner Probleme einen Satz, der schon bedeutend früher von Hesse gefunden und bewiesen worden ist. Dieser Autor selbst gebraucht in seiner Abhandlung zwar keine Polyedercoordinaten, aber trotzdem legen seine Formeln den Gedanken an sie nahe und gestatten uns einige interessante Bemerkungen. Um diese zu erlangen, mögen zunächst die Formeln Hesses in freier Form wiedergegeben werden, und an sie sollen dann noch einige Betrachtungen geknüpft werden.

Es sei gegeben die Funktion:

$$(1) \qquad f(X_1, X_2 \ldots X_n) = \Sigma_{ik}\, a_{ik} X_i X_k, \quad \left.\begin{matrix} i = \\ k = \end{matrix}\right\} 1, 2, \ldots, n$$

mit der Determinante der Coeffizienten:

$$A = | a_{ik} |$$

und den Unterdeterminanten:

$$A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}},$$

und zur Abkürzung soll gesetzt werden:

$$\mathfrak{A}_{ik} = \frac{A_{ik}}{A}.$$

I. Ferner sei gegeben ein Transformationssystem:

$$(3) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_i = \sum_1^n{}_h U_{ih} Y_h$$

---

[1]) Hesse, De curvis et superficiebus secundi ordinis; Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 20, S. 285 u. f. 1840.

mit der Determinante:

$$\Omega = | U_{ih} |$$

(4) und den Unterdeterminanten:

$$\Omega_{ih} = \frac{\partial \Omega}{\partial U_{ih}},$$

und es möge gesetzt werden:

$$\mathfrak{U}_{ih} = \frac{\Omega_{ih}}{\Omega}.$$

Dann gelten nach einem Determinantensatze die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_1^n h \, \mathfrak{U}_{ih} U_{ih} = 1, \\ \sum_1^n i \, \mathfrak{U}_{ih} U_{ih} = 1; \\ \sum_1^n h \, \mathfrak{U}_{ih} U_{kh} = 0, \\ \sum_1^n i \, \mathfrak{U}_{ih} U_{ik} = 0, \end{cases}$$

wenn für die beiden letzten die Bedingungen bestehen: $i \neq k$ und $h \neq k$.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man als Auflösung von (3):

$$(6) \quad Y_h = \sum_1^n i \, \mathfrak{U}_{ih} X_i.$$

Soll nun die Funktion (1) durch (3) übergeführt werden in:

$$\sum_1^n h \, \lambda_h Y_n^2,$$

so müssen, wie sich durch einfache Ausrechnung ergibt, folgende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\sum_1^n h \, f_{hp} U_{hq} = 0. \quad \left(\begin{matrix} p = \\ q = \end{matrix} \right\} 1, 2, \ldots n \Big)$$

(7) mit der Abkürzung:

$$f_{hp} = \left[\frac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_h} \right]_{X_i = U_{ip}}$$

und die λ_h berechnen sich aus:

$$(8) \quad \lambda_h = f(U_{1h}, U_{2h}, \ldots, U_{nh}).$$

Dann also gilt:

$$(9) \quad \Sigma_{ik} \, a_{ik} X_i X_k \equiv \sum_1^n h \, \lambda_h Y_h^2$$

verm. (3), (7) und (8).

Setzt man hierin die Werte für Y_h aus (6) ein, so folgt für die Coeffizienten:

$$a_{ik} = \sum_1^n {}_h \lambda_h \mathfrak{U}_{ih} U_{kh}, \tag{10}$$

welches System, mit U_{kp} multipliziert und über k summiert, unter Berücksichtigung von (7) liefert:

$$\sum_k a_{ik} U_{kp} = \lambda_p \mathfrak{U}_{ip}. \tag{11}$$

Für $i = 1, 2, \ldots n$ folgen also die n-Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^n {}_k a_{1k} U_{kp} = \lambda_p \mathfrak{U}_{1p} \\ \sum_1^n {}_k a_{2k} U_{kp} = \lambda_p \mathfrak{U}_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_1^n {}_k a_{nk} U_{kp} = \lambda_p \mathfrak{U}_{np}, \end{array}\right. \tag{12}$$

die mit Beachtung von (2) durch Auflösung ergeben:

$$\frac{U_{1p}}{\lambda_p} = \sum_1^n {}_k \mathfrak{A}_{k1} \mathfrak{U}_{kp}$$

$$\frac{U_{2p}}{\lambda_p} = \sum_1^n {}_k \mathfrak{A}_{k2} \mathfrak{U}_{kp}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{U_{np}}{\lambda_p} = \sum_1^n {}_k \mathfrak{A}_{kn} \mathfrak{U}_{kp}$$

oder zusammengefasst:

$$\frac{U_{ip}}{\lambda_p} = \sum_1^n {}_k \mathfrak{A}_{ki} \mathfrak{U}_{kp}.$$

Dies wie vorhin mit U_{kh} multipliziert gibt:

$$\frac{U_{ip} \cdot U_{kh}}{\lambda_p} = \sum_1^n {}_k \mathfrak{A}_{ki} \mathfrak{U}_{kp} \cdot U_{kh},$$

und letzteres über h summiert liefert:

$$\mathfrak{A}_{ki} = \sum_1^n {}_h \frac{U_{khi} \cdot U_{ih}}{\lambda_p}, \tag{13}$$

da $p = h = 1, 2 \ldots n$.

II. Ist noch ein zweites Transformationssystem gegeben:

$$X_i = \sum_1^n {}_h U_{i,n+h} Y_{n+h}, \tag{14}$$

das bewirken soll, dass

$$\sum_{ik} a_{ik} X_i X_k \equiv -\sum_1^n {}_h \lambda_{n+h} Y_{n+h}^2, \tag{15}$$

so muss wie in I. bestehen:

$$
(16) \quad \begin{cases} \sum_1^n h f_{h,n+p} U_{h,n+q} = 0, & \\ \text{wo:} \quad f_{h,n+p} = \left[\dfrac{\partial f(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial X_h}\right] X_i = U_{i,n+p}, & \left.\begin{array}{l} p = \\ q = \end{array}\right\} 1, 2, \ldots n \end{cases}
$$

und

$$
(17) \qquad \lambda_{n+h} = f(U_{1,n+h}, U_{2,n+h}, \ldots, U_{n,n+h}).
$$

Daraus ergibt sich ganz analog:

$$
(18) \qquad -\mathfrak{A}_{ki} = \sum_1^n h \frac{U_{k,n+h} \cdot U_{i,n+h}}{\lambda_{n+h}}.
$$

Dann folgt durch Addition von (13) und (18) das Gleichungssystem:

$$
\sum_1^{2n} h \frac{U_{ih} U_{kh}}{\lambda_h} = 0,
$$

das mit b_{ik} multipliziert und über $_{ik}$ summiert liefert:

$$
(19) \qquad \sum_1^{2n} h \ \sum ik \frac{U_{ik} U_{kh}}{\lambda_h} = 0.
$$

Dies ist eine Gleichung mit 2n-Gliedern, von denen jedes einzelne eine Summe von der Form ist:

$$
(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sum ik \ b_{ik} \frac{U_i U_k}{\lambda_1}.
$$

Die Gleichung (19) drückt nun aus, dass, wenn $2_n - 1$ dieser Glieder verschwinden, stets auch das $2n^{te}$ gleich Null ist. Sieht man nun die U_{ih}, U_{kh} an als 2n-Systeme der Unbekannten U_i U_k, so bestehen zwischen ihnen die Bedingungsgleichungen (7) und (16). Man erhält somit den Satz:

„Verschwindet die Funktion (20) für 2n—1-Systeme der Unbekannten U_i, so verschwindet sie auch für das $2n^{te}$, wenn zwischen den U_i die Gleichungen (7) und (16) bestehen."

III. Diesen Satz überträgt Hesse weiter für den Fall $n = 4$ in die geometrische Anschauung. Dann stellen für ihn die X_1, X_2, X_3, X_4 die homogenen Coordinaten eines beliebigen Punktes und die beiden Systeme: U_{1p}, U_{2p}, U_{3p}, U_{4p} und U_{1q}, U_{2q}, U_{3q}, U_{4q} die homogenen Coordinaten zweier bestimmter Punkte P_p und P_q dar, wenn p und q zwei feste Zahlen sind. Aus (7) folgt nun sofort, dass die beiden Punkte konjugiert sind in Bezug auf die Fläche:

$$
(1') \qquad \sum ik \ a_{ik} X_i X_k = 0: \left.\begin{array}{l} i = \\ k = \end{array}\right\} 1, 2, 3, 4.
$$

Durchlaufen aber p und q unabhängig von einander die Werte 1, 2, 3, 4, so stellen die entstehenden 6 Gleichungen (7) die Bedingungen dafür dar, dass das Quadrupel der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, d. h. das Tetragon $P_1 \ldots P_4$ der Fläche (1') konjugiert ist.

Unter ebenderselben Voraussetzung liefert (16) dieselbe Beziehung des Tetragons der Punkte $P_5 \ldots . P_8$ zu derselben Fläche (1'). Dann aber folgt nach dem Satze in II:

„Alle Flächen

$$\Sigma_{ik}\, b_{ik} \frac{U_i\, U_k}{\lambda_h} = 0,$$

die durch sieben der acht Ecken gelegt sind, gehen durch einen und denselben achten Punkt P_8."

Da aber dieser achte Punkt als letzter Schnittpunkt von drei durch die sieben andren Ecken gelegten Flächen bestimmt ist, so folgt das Paar der beiden dualen Sätze:

„Zwei Tetragone, die einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, sind beide gleichzeitig drei Flächen 2. O. einbeschrieben."

„Zwei Tetraeder, die einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind, sind beide gleichzeitig drei Flächen 2. Kl. umbeschrieben."

Da ein Polartetragon einer Fläche 2. O. stets auch Polartetraeder derselben Fläche ist, wenn man diese als Fläche 2. Kl. ansieht, so ergeben sich durch Vereinigung der beiden dualen Sätze die weiteren zwei:

„Zwei Tetragone, die drei Flächen 2. O. einbeschrieben sind, sind gleichzeitig drei Flächen 2. Kl. umbeschrieben."

„Zwei Tetraeder, die drei Flächen 2. Kl. umbeschrieben sind, sind gleichzeitig drei Flächen 2. O. einbeschrieben."

IV. Versteht man unter den X_i, Y_h und Y_{n+h} Tetraedercoordinaten, so folgt aus den Gleichungen (3) und (14), dass die Grössen $U_{1p} \ldots U_{4p}$, und $U_{1q} \ldots . . U_{4q}$ die Coordinaten der Ecken des neuen durch die Ebenen $Y_h = 0$ gebildeten Coordinatentetraeders und ebenso die Grössen $U_{1,n+p}, \ldots U_{4,n+p}$ und $U_{1,n+q} \ldots U_{4,n+q}$ die Ecken des Coordinatentetraeders der Ebenen $Y_{n+h} = 0$ darstellen, und die Sätze in III. gelten ebenso auch jetzt. Dann haben wir aber aus den Formeln in Tetraedercoordinaten den Satz für zwei Tetragone erhalten, während sich in § 5 aus den Gleichungen in Tetraedercoordinaten der Satz für die Tetraeder ergab. Dieser äusserliche Unterschied darf uns nicht wundern, denn dort wurden durch die Multiplikation die homogenen Punktcoordinaten eingeführt, die den Sprung zum dualen Satz bewirkten. Da jedoch das Polartetragon einer Fläche 2. Gr. auch Polartetraeder derselben ist, so lässt sich mit Hülfe des letzten Satzes in III. die volle Uebereinstimmung des Hesseschen Satzes mit dem von Serret abgeleiteten herstellen. Es folgt also aus den Formeln Hesses derselbe Satz über zwei Polartetraeder, den wir vorher mit Hülfe der Polyedercoordinaten abgeleitet haben.

Das führt uns zu einer weiteren Bemerkung. In § 2 ist dargetan worden, dass die Gleichung der Fläche 2. O. auf ein Polarpolyeder bezogen sein muss, wenn sie nur die Quadrate der Coordinaten enthalten soll, und im Abschnitt I. dieses Paragraphen haben wir mit Hesse die Gleichung einer Fläche 2. O. in den Coordinaten X_i transformiert auf die Y_h und fanden, dass die Gleichung in diesen nur die Quadrate enthielt, wenn die Bedingungen (7) bestanden. Verstanden wir unter den X_i und Y_h Tetraedercoordinaten, so ist schon gezeigt worden, dass die Bedingungsgleichungen (7) forderten, dass das Tetraeder der Ebenen $Y_h = 0$ der Fläche konjugiert sei. Bleibt man aber nicht bei den Tetraedercoordinaten stehen, sondern sieht man die X_i und Y_h als Polyedercoordinaten im

allgemeinen an — und dem steht nichts im Wege —, so kann man aus den Gleichungen Hesses auch die entsprechenden Sätze für die andern in § 2 aufgeführten Polyeder erhalten. Dann wird durch die Gleichungen (3) die allgemeine Gleichung der Fläche 2. O. in Polyedercoordinaten:

$$\Sigma_{ik}\, a_{ik} X_i X_k = 0, \quad \left.\begin{matrix} i = \\ k = \end{matrix}\right\} 1, 2, \ldots n$$

auf das Polyeder der Ebenen $Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0$ transformiert, und damit die Gleichung in diesen Coordinaten nur die Quadrate enthalte, müssten die Bedingungen (7) bestehen. In Bezug auf diese Fläche hatte die Polarebene eines Punktes $X_{1p}, X_{2p}, \ldots, X_{np}$ nach § 1, XII′ die Gleichung:

$$\sum_1^n{}_i\, f_i(X_{1p}, X_{2p}, \ldots . X_{np}) X_i = 0.$$

Dies wenden wir zunächst auf $n = 5$ an. Dann sind die beiden Coordinatenpolyeder Pentaeder; in diesem Falle erhält man für den Punkt P_{123}, den Schnittpunkt der Ebenen $Y_1 = 0, Y_2 = 0, Y_3 = 0$ des zweiten Pentaeders, für dessen Coordinaten sich aus (3) die Werte ergeben, bezogen auf das erste Pentaeder:

$$X_{i,123} = U_{i4} Y_4 + U_{i5} Y_5, i = 1, 2, \ldots 5,$$

die Gleichung der Polarebene in der Form:

$$\sum_1^5{}_i\, f_i(U_{14} Y_4 + U_{15} Y_5, \ldots, U_{54} Y_4 + U_{55} Y_5) X_i = 0$$

oder:

$$Y_4 \sum_1^5{}_i\, f_i(U_{14}, \ldots U_{54}) X_i + Y_5 \sum_1^5{}_i\, f_i(U_{15}, \ldots U_{55}) X_i = 0.$$

Setzt man hierin für X_i die Werte $U_{i1}\; Y_1 + U_{i2}\; Y_2$ oder $U_{i2}\; Y_2 + U_{i3}\; Y_3$, die Coordinaten der beiden auf der Gegenkante zu P_{123} gelegenen Ecken des Pentaeders, so wird die Gleichung nach (7) durch sie erfüllt: die Polarebene der Ecke P_{123} geht also, wenn die Bedingungen (7) bestehen, durch die entsprechende Gegenkante. Analoges lässt sich ebenso für die Polarebenen aller andern Ecken zeigen, d. h.: die Bedingungen (7) sind gleichbedeutend mit der Forderung, dass das Pentaeder der Ebenen $Y_h = 0$ der Fläche konjugiert sei.

Ist $n = 6$, so haben wir in den X_i und Y_h zwei Systeme von Hexaedercoordinaten und für den Punkt P_{123} (Bedeutung wie vorhin) ergeben sich nun aus (3) die Coordinaten:

$$X_{i,123} = U_{i4} Y_4 + U_{i5} Y_5 + U_{i6} Y_6.$$

Die Polarebene dieses Punktes in Bezug auf die Fläche hat dann die Gleichung:

$$\sum_1^6{}_i\, f_i(U_{14} Y_4 + U_{15} Y_5 + U_{16} Y_6, \ldots . U_{64} Y_4 + U_{65} Y_5 + U_{66} Y_6) X_i = 0$$

oder:

$$Y_4 \sum_1^6{}_i\, f_i(U_{14}, \ldots, U_{64}) X_i + Y_5 \sum_1^6{}_i\, f_i(U_{15}, \ldots, U_{65}) X_i + Y_6 \sum_1^6{}_i\, f_i(U_{16}, \ldots, U_{66}) X_i = 0,$$

welcher Gleichung die Coordinaten der Gegenecke von P_{123}:

$$X_{i,456} = U_{i1} Y_1 + U_{i2} Y_2 + U_{i3} Y_3$$

nach (7) erfüllen. Das Analoge folgt für alle andern Ecken des zweiten Hexaeders in gleicher Weise, also ist das Hexaeder der Ebenen $Y_h = 0$ ein Polarhexaeder der Fläche, wenn die Bedingungen (7) bestehen.

Setzt man endlich $n = 8$ voraus, und versteht man unter den Ebenen $Y_h = 0$ dann die Ebenen eines hexagonalen Octaeders, so folgt in ganz derselben Weise, dass die Bedingungsgleichungen nichts anderes verlangen, als dass das Octaeder der Ebenen $Y_h = 0$ der Fläche konjugiert sei, damit die Gleichung der Fläche in den Coordinaten Y_h nur die Quadrate enthält.

Genau die gleichen Schlüsse gelten selbstverständlich auch für die dualen Figuren, wenn wir die Formeln Hesses dual deuten, und da die Bedingungen (7) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind, so haben wir aus den Gleichungen Hesses die Sätze I bis IV des Paragraphen 2 in ihrem vollen Umfange abgeleitet.

Dass endlich dieselben Resultate für das Polyeder der Ebenen Y_{n+h} folgen, braucht nach dem Vorhergehenden nicht noch extra bewiesen zu werden.

V. Aus den Hesseschen Formeln aber können wir noch mehr entnehmen. In ihnen sind implicite auch schon die beiden Identitäten zwischen acht und zehn nach dem Modul 2 associierten Ebenen enthalten. Um dies zu zeigen, beginnen wir mit $n = 4$. Dann haben wir, durch die Systeme (3) und (14) definiert, zwei Tetraeder, die unter den Bedingungen (7) und (16) gleichzeitig derselben Fläche 2. O. konjugiert sind. Unter diesen Bedingungen aber bestehen die beiden Identitäten (9) und (15), aus denen sich durch Addition die neue Identität ergibt:

$$\sum_1^8 {}_h \lambda_h Y_h^2 \equiv 0.$$

Dass die Existenz dieser Identität auch ausreicht, damit die beiden Tetraeder einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert sind, lässt sich ebenfalls aus den Formeln dieses Paragraphen zeigen, und zwar in derselben Weise wie früher. Die letzte Identität führt nämlich zu den beiden andern (9) und (15) zurück und für diese sind wieder (7) und (16) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, und diese besagen, wie in IV gezeigt worden, dass die beiden Tetraeder derselben Fläche 2. O. konjugiert sind. Da nun diese beiden Tetraeder drei Flächen 2. Kl. umbeschrieben sind, ihre Ebenen also nach dem Modul 2 associiert sind, so ist damit der Satz I des Paragraphen 5 erhalten.

Nicht ganz soweit kommen wir mit Hülfe des bisher Abgeleiteten, wenn wir $n = 5$ setzen. Genau dieselbe Methode, die wir vorhin anwandten, führt uns aber zu dem Satze: „Sind zwei Pentaeder einer und derselben Fläche 2. O. konjugiert, so besteht zwischen den auf sie bezogenen Polyedercoordinaten eines beliebigen Punktes die Identität:

$$\sum_1^{10} {}_h \lambda_h Y_h^2 \equiv 0,$$

und dessen Umkehrung. Diese Identität ist aber nach § 3, I die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die zehn Ebenen der beiden Pentaeder nach dem

Modul 2 associiert sind. Nimmt man also diesen Satz als bekannt an, so kann man auf diesem Umwege sehr einfach aus den Hesseschen Formeln auch den folgenden erhalten: Zwei Polarpentaeder einer und derselben Fläche 2. O. sind beide einer und derselben Fläche 2. Kl. umbeschrieben:

Fasst man also schliesslich die Betrachtungen dieses Paragraphen nochmals zusammen, so hat sich aus ihnen das Resultat ergeben:

Die Hesseschen Formeln liefern uns nicht nur für zwei Tetraeder den Satz IV. und IV' des Paragraphen 5, sondern in ihnen sind insplicite auch die Sätze des Paragraphen 2 über Polarpolyeder, der Identitätssatz I im Paragraph 5 und endlich der Satz enthalten:

„Sind zwei Pentaeder einer und derselben Fl. 2. O. konjugiert, so besteht zwischen den auf sie bezogenen Polyedercoordinaten eines beliebigen Punktes die Identität:

$$\sum_{1}^{10} {}_i \lambda_h Y_h^2 \equiv 0,\text{“}$$

nebst dessen Umkehrung.

§ 8.

Reyes Untersuchungen über Trägheits- und höhere Momente und die Polygoncoordinaten.

Endlich werfen wir noch einen flüchtigen Blick auf die Grundlagen, mit denen Reye seine Untersuchungen „über Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems“[1]) beginnt. Da aber nur die Trägheitsmomente ihm Sätze über Flächen 2. O. liefern, so seien die Bemerkungen im Folgenden auf diese beschränkt, und weiter soll, so wollen wir annehmen, das Massensystem nur aus einer Anzahl von getrennten Punkten bestehen.

Ist

$$(1) \qquad P_i \equiv x_i u + y_i v + z_i w + p_i q = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ein System von Massenpunkten mit den Massen m_i und ist p_{i_0} die Entfernung einer Ebene E_0 mit den Coordinaten $u_0\ v_0\ w_0\ q_0$ von den Punkten P_i, so ist das Trägheitsmoment des Massenpunktsystems (1) in Bezug auf E_0 bekanntlich ausgedrückt durch

$$\sum_{1}^{n} {}_i m_i p^2_{i_0}$$

oder, da

$$p_{i_0} = x_i u_0 + y_i v_0 + z_i w_0 + p_i q_0,$$

durch

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n} {}_i m_i (x_i u_0 + y_i v_0 + z_i w_0 + p_i q_0)^2.$$

---

[1]) Crelles Journal. Band 72, Seite 293 u. f. 1870.

Für die Coordinaten aller Ebenen, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Punktsystems (1) einen bestimmten Wert M hat, gilt also

$$\sum_1^n {}_i\, m_i (x_i u_0 + y_i v_0 + z_i w_0 + p_i q_0)^2 = M.$$

Ist dieser Wert gleich Null, so wird die Bedingung für alle Ebenen mit dieser Eigenschaft die folgende:

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_i\, m_i (x_i u_0 + y_i v_0 + z_i w_0 + p_i q_0)^2 = 0.$$

Diese sagt aus, dass diese sämtlichen Ebenen eine bestimmte Fläche 2. Kl. berühren, die Reye die „zweite Nullfläche des Systems" nennt.

Haben nun zwei Massenpunktsysteme P_i und P_k' mit den Massen m_i und m_k' $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$ für jede Ebene des Raumes dieselben Trägheitsmomente, so heissen sie „aequivalent hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente"; solche Systeme haben nach ihrer Definition auch identische zweite Nullflächen. Bildet man daher (3) für jedes System, so folgt aus beiden die Identität:

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_i\, m_i (x_i u + y_i v + z_i w + p_i q)^2 \equiv \sum_1^m {}_k\, m_k' (x_k' u + y_k' v + z_k' w + p_k' q)^2.$$

Umgekehrt folgt ebenso: Solche Punktsysteme, die identische zweite Nullflächen haben, sind aequivalent hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente.

Ein System von Massenpunkten heisst „indifferent hinsichtlich der Trägheitsmomente", wenn für jede Ebene des Raumes sein Trägheitsmoment gleich Null ist. Dann also gilt für ein solches System:

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_i\, m_i (x_i u + y_i v + z_i w + p_i q)^2 \equiv 0.$$

Bildet man jetzt für zwei aequivalente Systeme die beiden Trägheitsmomente

$$\sum_1^n {}_i\, m_i\, p_i^2 \text{ und } \sum_1^m {}_k\, m_k'\, p_k'^2,$$

so erhält man durch Subtraction:

$$\sum_1^n {}_i\, m_i\, p_i^2 - \sum_1^m {}_k\, m_k'\, p_k'^2 \equiv 0;$$

d. h. ein indifferentes Massenpunktsystem kann als Differenz von zwei aequivalenten aufgefasst werden und kann ebenso wieder in zwei solche Systeme zerlegt werden.

Diese Sätze betrachten wir nun von dem Gesichtspunkte der Polygoncoordinaten aus. Da ergibt sich nach der Definition dieser Coordinaten in § 1, dass die p_{i_0}, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, mit den Polygoncoordinaten der Ebene E_0, die bezogen sind auf das n-Eck der Massenpunkte P_i, identisch sind. Man kann daher, wenn man den Faktor zunächst unberücksichtigt lässt, die Ausdrücke für Trägheitsmomente ausprechen

als die Summe der Quadrate von Polygoncoordinaten von denen jedes mit einer bestimmten Grösse m_i multipliziert ist. Da aber die Ausdrücke in den Quadraten homogen sind, also der gemeinsame Faktor in der Gleichung der zweiten Nullfläche verschwindet, so ergibt:

„Die Gleichung (3) der zweiten Nullfläche eines Massensystems (1) ist nichts anderes als die Gleichung der Fläche in Polygoncoordinaten, die bezogen sind auf Polygon der Massenpunkte P_i, und kann daher in diesen folgendermassen geschrieben werden:

$$\sum_1^n m_i U_i^2 = 0. \text{“} \tag{2'}$$

Aus diesem Resultat folgt mit Hülfe der Sätze des § 2 ein sehr einfacher Beweis des folgenden Theorems von Reye:[1])

„Jedes vier-, fünf- oder sechspunktige Massensystem bildet ein Poltetraeder, Polfünfeck resp. Polsechseck seiner zweiten Nullfläche.“

Setzt man nämlich n = 4, 5 oder 6, so geht (2') über in die Gleichung I, II oder III des § 2, aus dessen Form nach den dortigen Sätzen ohne weiteres die Behauptung folgt.

Die erwähnte Beziehung zwischen den Trägheitsmomenten und den Polygoncoordinaten dürfte auch der innere Grund dafür sein, dass Reye genau denselben Beweis für die geometrischen Eigenschaften von zehn Punkten einer Fläche zweiter Ordnung wie Serret geben kann,[2]) ohne, wie er selbst ausdrücklich erwähnt, von ihm abhängig zu sein.[3]) Zunächst erhält er nämlich wie dieser die Identität:

$$\sum_1^{10} m_i (x_i u + y_i v + z_i w + p_i q)^2 \equiv 0,$$

die unter der Bedingung besteht, dass die zehn Punkte P_i auf einer Fläche 2. O. liegen. Diese Identität legt er nach seiner Anschauungsweise weiter aus als Ausdruck für ein zehnpunktiges indifferentes Massenpunktsystem. Ein solches kann, wie vorhin erwähnt ist, aufgelöst werden in zwei aequivalente. Zerlegt man dasselbe in zwei Systeme von vier und sechs Punkten, so erhält man zu diesen beiden aequivalenten Systemen dieselbe zweite Nullfläche und in Bezug auf diese sind das Tetragon und das Hexagon Polarpolygon. Durch Zerlegung des zehnpunktigen Systems in zwei fünfpunktige erhält Reye ebenso den Satz, dass zehn Punkte einer Fläche 2. O. die Ecken von je zwei solchen Pentagonen sind, welche einer und derselben Fläche 2. Kl. konjugiert sind. Diese Operationen der Zerlegung des indifferenten Massenpunktsystems sind aber genau gleichbedeutend mit der Serretschen Methode der Teilung der Identitäten.

Erwähnt sei schliesslich noch, dass Reyes Untersuchungen über die höheren Momente ihn zu einigen Sätzen über Flächen n^{ter} Kl. führen, z. B. über die Darstellung der Fläche n^{ter} Klasse durch diese Gleichung, welche nur die n^{ten} Potenzen der Abstände

[1]) Crelles Journal, Band 77, S. 269—270.

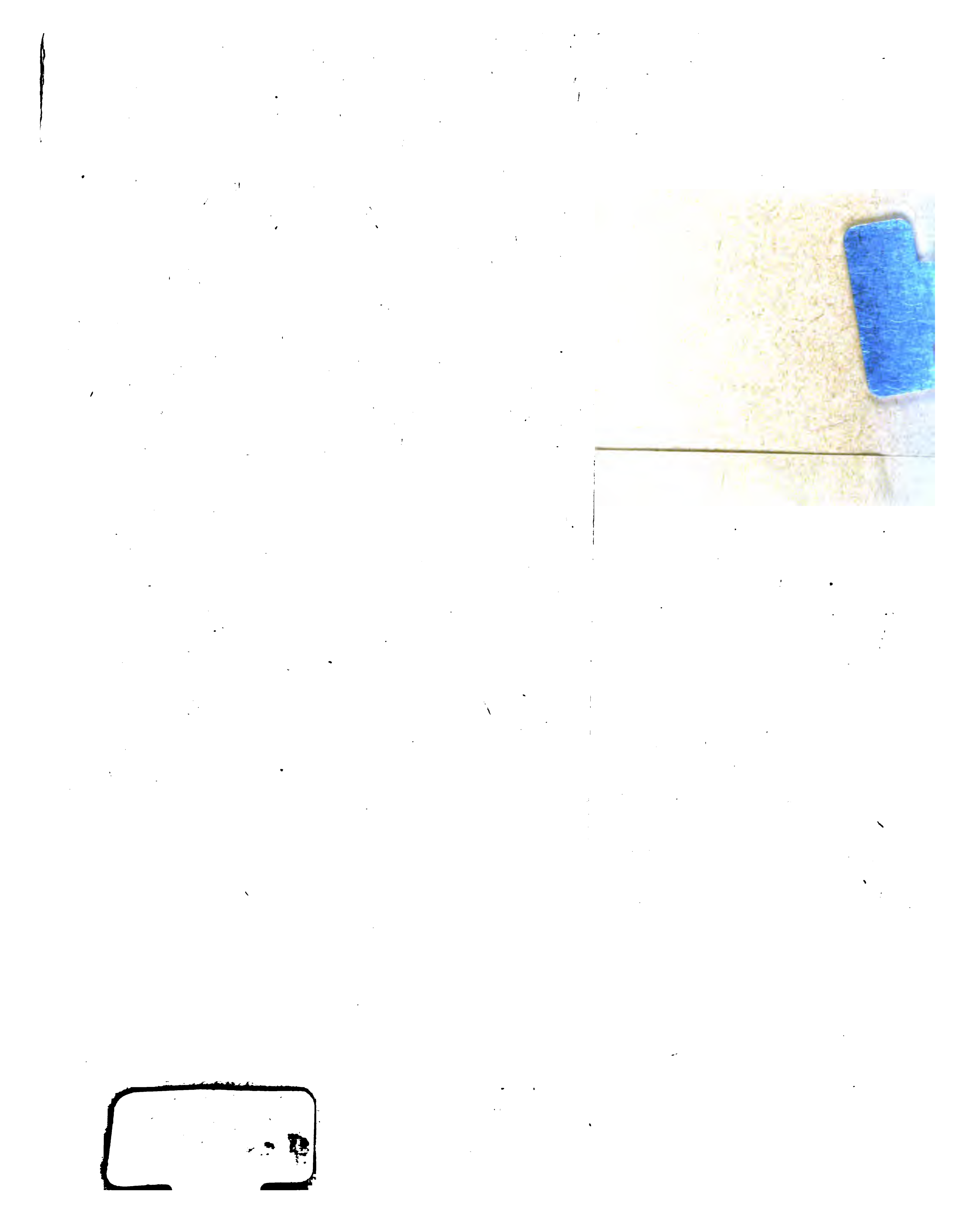
[2]) a. a. O. S. 270—271.

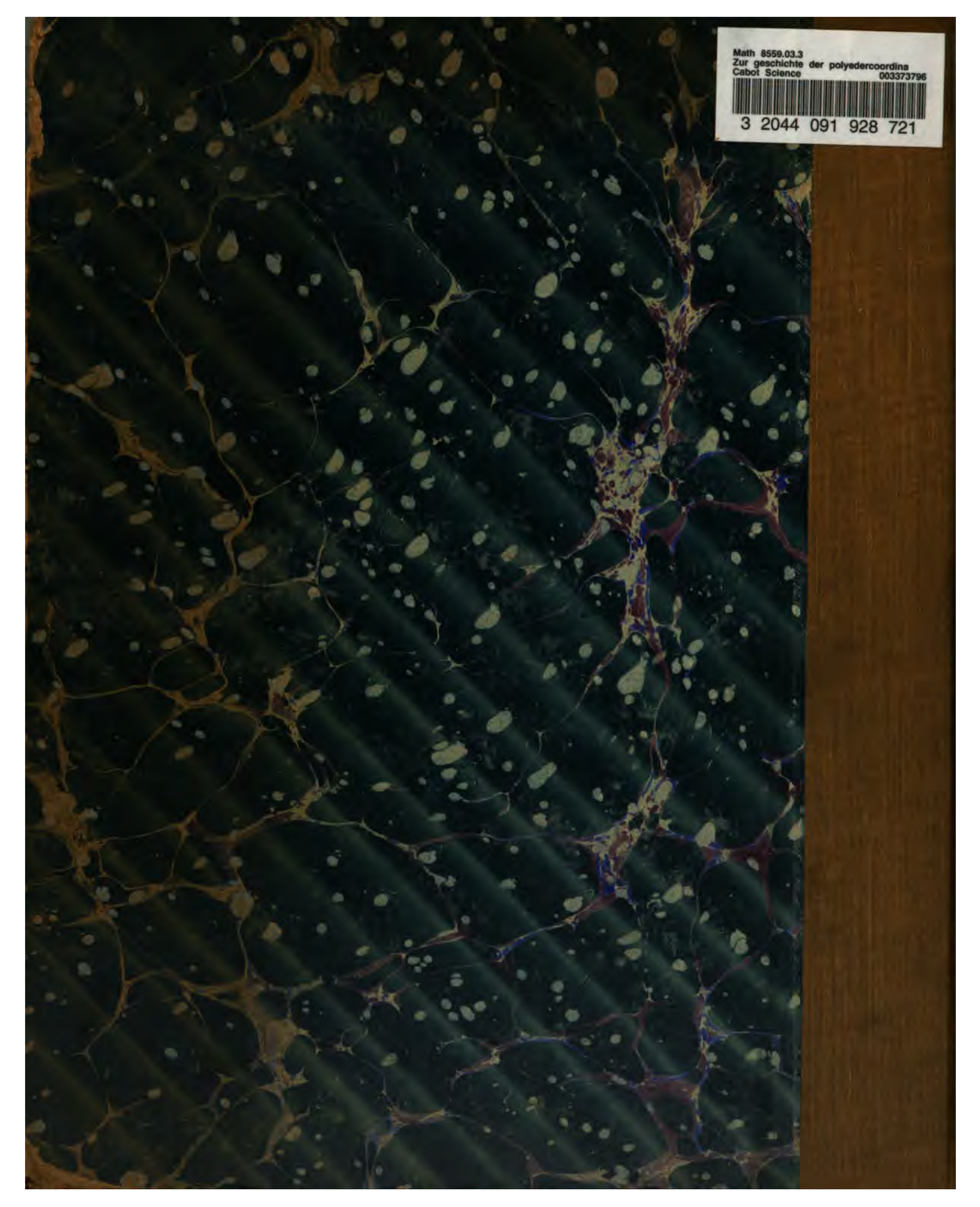
[3]) a. a. O. S. 269.

der variabeln Ebene von beliebig vielen festen Punkten enthält, wenn man die Fläche n^{ter} Klasse als die n^{ter} Nullfläche des Massenpunktsystems auffasst.[1]) Eine solche Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung der Fläche in Polygoncoordinaten. Es ergibt sich somit daraus die Folgerung, dass auch für manche Betrachtungen über Flächen höheren als zweiten Grades die Polygoncoordinaten anwendbar sein und vielleicht ebenfalls ihre guten Dienste leisten werden; doch soll hierauf nicht mehr eingegangen werden.

[1]) Crelles Journal, Band 72, S. 325—326.

Auch an dieser Stelle erlaube ich mir, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Staude, für die Anregung zu diesem Thema und das Interesse, das er ihr entgegengebracht hat, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.




Math 8559.03.3
Zur geschichte der polyedercoordina
Cabot Science 003373796
3 2044 091 928 721